



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

## **ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**στα πλαίσια του ΠΜΣ  
«Ανάλυση και Σχεδιασμός Κατασκευών  
Ενεργειακών Υποδομών»**

## **ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**

**ΚΟΥΙΝΗ ΔΗΜΗΤΡΑ  
ΤΣΙΠΛΑΚΟΥΛΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ  
ΣΟΦΙΑΝΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

**ΒΟΛΟΣ Ιούλιος 2021**

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ****σελίδα**

Ευχαριστίες	i
Κατάλογος Σχημάτων	ii
Σκοπός – Αντικείμενο και Διάρθρωση της Εργασίας	iv
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 <sup>ο</sup> Γενικές Επισημάνεις και Σύντομη Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	1
1.1 Γενικές Επισημάνσεις	1
1.2 Ανασκόπηση Χαρακτηριστικών Δημοσιεύσεων	1
Βιβλιογραφία	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 <sup>ο</sup> Απλά Δυναμικά Συστήματα με Συμμετρίες	
Αναστροφής Χρόνου της Μηχανικής	8
2.1 Γενικά	8
2.1.1 Ο Στρόμβος (Σβούρα) που περιστρέφεται περί σταθερό σημείο	9
2.1.1 <sup>α</sup> Αρχική – Κλασσική Ανάλυση	10
2.1.1 <sup>β</sup> Ανάλυση με το λογισμικό <i>Mathematica</i> Προσεγγιστική Λύση	14 17
Ακριβής Λύση	19
2.1.1 <sup>γ</sup> Γραφική – Αριθμητική απόδειξη της ύπαρξης χρονικής συμμετρίας	21
2.1.2 Η εξίσωση – συνάρτηση του Mathieu	25
Βιβλιογραφία	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 <sup>ο</sup> Ειδικά Διανυσματικά Πεδία και Ειδικές Απεικονίσεις	31
3.1 Γενικά	31
3.2 Η Κβαντική Απεικόνιση «των Αρτοποιιών»	31
3.3 Επιρροή του Βήματος κλπ.	34
3.4 Ένα Ιδιαίτερο Πρόβλημα Τριών Σωμάτων	38
Βιβλιογραφία	41
ΝΕΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	43
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	44
Α.1 Ορισμοί και Χαρακτηριστικές Εξισώσεις	44
Α.1.1 Η έννοια των Πολλαπλοτήτων (Manifolds)	44
Α.1.2 Διαφορομορφισμοί (Diffeomorphisms)	44
Α.1.3 Τόρος	44

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ****σελίδα**

A.1.4	Εξισώσεις Hamel	45
A.2	Θεωρήματα	46
A.2.1	Το θεώρημα της Emmy Noether και οι συμμετρίες	46
A.2.2	Το θεώρημα KAM	49

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Οι συντάξαντες την Διπλωματική θέλουμε να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας στον Καθηγητή κ.. Σοφιανόπουλο Δημήτριο για την δυνατότητα που μας έδωσε να υλοποιήσουμε και να ολοκληρώσουμε την μεταπτυχιακή μας Διατριβή, αλλά και για τον πολύτιμο χρόνο που μας διέθεσε για την περάτωση της παρούσας εργασίας, εν μέσω αντικειμενικών κατά τεκμήριο δυσκολιών. Οι σημαντικές υποδείξεις και συμβουλές του μας κατεύθυναν σ' ένα σωστό τρόπο σκέψης πάνω απ' όλα και μας προσέφεραν σημαντικά εφόδια για την μετέπειτα ζωή μας.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε ακόμα όλους του καθηγητές της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και ιδιαίτερα του οικείου Τμήματος, για τις πολύτιμες γνώσεις που μας προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, θέλουμε να εκφράσουμε ένα τεράστιο ευχαριστώ στις οικογένειες μας, για την στήριξη και την εμπιστοσύνη που μας έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μας. Πέραν όμως από την πολύτιμη αυτή στήριξη, μας έδωσαν όλα τα εφόδια ώστε να γίνουμε σωστοί άνθρωποι, και αυτό είναι κάτι που δεν διδάσκεται, αλλά μεταδίδεται.

Δήμητρα Κούνη  
Αντώνης Τσιπλακούλης

**ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ**

<b>A/A</b>	<b>Τίτλος</b>	<b>σελίδα</b>
2.1	Απλή αναπαράσταση της έννοιας συμμετρίας αναστροφής χρόνου σε δυναμικά συστήματα	8
2.2	Στρόμβος περιστρεφόμενος περί σταθερό σημείο	9
2.3	Διάγραμμα $\theta - V(\theta)$ για τον στρόμβο	12
2.4	Περιστροφή στρόμβου, με τρεις διαφορετικές μορφές μετάπτωσης (precession)	12
2.5	Περιστροφή στρόμβου για την προεξάρχουσα μορφή μετάπτωσης, με πλήρη συμμετρία αντιστροφής χρόνου: $t \rightarrow +\infty$ , $t \rightarrow -\infty$	22
2.6	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $\theta_0 = 0.20$	22
2.7	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $\varphi_0 = 0.10$	22
2.8	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $\varphi_0 = 0.20$	23
2.9	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $\psi_0 = 0.10$	23
2.10	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $\psi_0 = 0.20$	24
2.11	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $p_{\theta_0} = 0.50$	24
2.12	Ως Σχήμα 2.5, αλλά για $p_{\theta_0} = 2$	25
2.13	Πορτραίτα επιπέδου φάσης $x(t)$ , $\dot{x}(t)$ για την ΑΠ (α) $t \rightarrow +\infty$ , (β) $t \rightarrow -\infty$	27
2.14	Ως Σχήμα 2.13, αλλά για $x(0) = 0.1$ , $\dot{x}(0) = 0.1$	28
2.15	Ως Σχήμα 2.14, αλλά για $S = 0.50$	28
2.16	Ως Σχήμα 2.13, αλλά για $S = 0.9$ , $\omega = 0.1$ και πολύ μικρές τιμές των αρχικών συνθηκών	29
2.17	Απειρισμός της συνάρτησης λύσης (αστάθεια) για $S = 0.2$ , $\omega = 0.1$ και μικρές τιμές των αρχικών συνθηκών	29
3.1	Αποστάσεις δύο γειτονικών σημείων της απεικόνισης για (α) $n: 1 \div 500$ , (β) $n: 501 \div 1000$ , και (γ) $n: 1001 \div 1500$	33
3.2	Αποστάσεις δύο γειτονικών σημείων της απεικόνισης για (α) $n: 1500 \div 1001$ , (β) $n: 1000 \div 501$ , και (γ) $n: 500 \div 1$	34

A/A	Τίτλος	σελίδα
	<i>Γραφική απεικόνιση αριθμητικής επίλυσης του ΔΠ των εξισώσεων</i>	
3.3	<i>(3.5) και (3.6) με τη μέθοδο Dormand-Prince 8, τόσο για <math>t \rightarrow +\infty</math> όσο και για <math>t \rightarrow -\infty</math></i>	36
	<i>Γραφική απεικόνιση αριθμητικής επίλυσης του ΔΠ των εξισώσεων</i>	
3.4	<i>(3.5) και (3.6) με τη μέθοδο Milne, τόσο για <math>t \rightarrow +\infty</math> όσο και για <math>t \rightarrow -\infty</math></i>	37
3.5	<i>Ορθογώνιο τρίγωνο του προβλήματος του Burrau</i>	38
3.6	<i>Στιγμιότυπα του κλασσικού προβλήματος κίνησης τριών σωμάτων με ίδιες μάζες</i>	39
3.7	<i>Απεικόνιση Poincaré του προβλήματος Burrau σε αριθμητική προς τα εμπρός «ολοκλήρωση»</i>	40
3.8	<i>Απεικόνιση Poincaré του προβλήματος Burrau σε αριθμητική προς τα πίσω «ολοκλήρωση»</i>	41
A.1	<i>Προβολή της ροής σε τόρο</i>	45
A.2	<i>Απεικόνιση Poincare x-z</i>	45
A.3	<i>Συνεχής μετασχηματισμός συντεταγμένων</i>	48

## **ΣΚΟΠΟΣ, ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία πραγματεύεται απλά αλλά και σύνθετα δυναμικά συστήματα των Φυσικών Επιστημών (τόσο διανυσματικά πεδία όσο και απεικονίσεις) σε σχέση με διαφορών ειδών συμμετρίες, με έμφαση στην χρονική αντιστρεψιμότητα (χρονική συμμετρία).

Ειδικότερα χρησιμοποιούνται τόσο θεωρητικές όσο και αριθμητικές προσεγγίσεις για τα εξεταζόμενα συστήματα, και η απόδειξη – κατάδειξη των συμμετριών αυτών πραγματοποιείται με χρήση είτε κλασσικών μεθόδων είτε με χρήση εμπορικού ή/και ελεύθερου λογισμικού ανάλυσης.

Μετά από συνοπτική βιβλιογραφική ανασκόπηση του 1<sup>ου</sup> Κεφαλαίου, εξετάζονται στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο απλά δυναμικά συστήματα, όπως ο στρόμβος, και παρέχονται ακριβείς και προσεγγιστικές λύσεις – συνοδευόμενες από γραφήματα - που καταδεικνύουν τη χρονική συμμετρία. Πέραν τούτου, στο ίδιο Κεφάλαιο εξετάζεται και η εξίσωση – συνάρτηση Mathieu, που με παρόμοια διαδικασία φαίνεται ότι παρουσιάζει συμμετρία αντιστροφής χρόνου, σε ορισμένες πάντως ευσταθείς περιοχές.

Στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, εξετάζονται ειδικά διανυσματικά πεδία και ειδικές απεικονίσεις ανωτέρων διαστάσεων, και πιο συγκεκριμένα η κβαντική απεικόνιση «των αρτοποιιών», το σύστημα κοινής περιστροφής δύο σωμάτων αλλά και το ιδιάζον πρόβλημα τριών σωμάτων του Burrau. Με προσεγγιστικές – αριθμητικές μεθόδους δείχνεται η αντιστρεψιμότητα χρόνου αυτών των προβλημάτων, ακόμα και σε περιπτώσεις μεθόδων ολοκλήρωσης χωρίς ικανοποιητική ακρίβεια.

Κάθε ένα από τα ως άνω Κεφάλαια συνοδεύεται από Βιβλιογραφία, ενώ η Εργασία συμπληρώνεται από Παράρτημα, στο οποίο δίδονται ορισμοί, εξισώσεις και θεωρήματα χρήσιμα για την κατανόηση της όλης ύλης.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> : Γενικές Επισημάνσεις και Σύντομη**

### **Βιβλιογραφική Ανασκόπηση**

#### **1.1 Γενικές Επισημάνσεις**

Στο τρέχον Κεφάλαιο πραγματοποιείται μια σύντομη – περιληπτική και όχι διεξοδική βιβλιογραφική ανασκόπηση επί των εννοιών και των προβλημάτων που σχετίζονται με το αντικείμενο της παρούσας Διατριβής.

Θεωρείται στο εξής δεδομένο ότι οι γνώσεις που αφορούν τη Μη Γραμμική Δυναμική (διανυσματικά πεδία και απεικονίσεις) δεν απαιτούν περαιτέρω αναφορά και εμβάθυνση, εκτός κάποιων ιδιαιτερώσεων γνώσεων, οι οποίες παρατίθενται επεξηγηματικά στο Παράρτημα, αναπόσπαστο Μέρος της Εργασίας.

Όπου κρίθηκε αναγκαίο, δόθηκαν απ' ευθείας οι σχετικές διαδικτυακές πηγές υπό μορφή υποσημειώσεων, χωρίς αυτές να συμπεριληφθούν στην κατ' εξοχήν Βιβλιογραφία του κάθε Κεφαλαίου, για λόγους αμεσότητας.

#### **1.2 Ανασκόπηση Χαρακτηριστικών Δημοσιεύσεων**

Η εξέταση των χρονικά αναστρέψιμων εξισώσεων δυναμικών συστημάτων (διανυσματικών πεδίων και απεικονίσεων) έχει απασχολήσει σε σημαντικό βαθμό την Επιστημονική Κοινότητα. Λόγω του μεγάλου αριθμού σχετικών δημοσιεύσεων, έγινε επιλογή μιας σχετικά παλαιάς (αλλά ιδιαίτερα χαρακτηριστικής) και κάποιων άλλων εργασιών που δημοσιεύτηκαν μετά το 1992 έως το 2018.

Η πρωτοπόρα εργασία του A. J. Van der Schaft, που δημοσιεύτηκε τον Αύγουστο του 1983<sup>[1]</sup>, αφορά τις συμμετρίες, τους νόμους διατήρησης και την χρονική αναστρεψιμότητα των Χαμιλτονιανών συστημάτων (Hamiltonian Systems) λόγω εξωτερικών δυνάμεων. Στο παρελθόν είχαν εξεταστεί συστήματα Hamilton χωρίς εξωτερικές δυνάμεις. Ένα απλό πρώτο χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος Hamilton με εξωτερικές δυνάμεις είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Ακολουθούν οι εξισώσεις Euler- Lagrange και η εξίσωση μαγνητικής ροής με επαγωγή. Στη συνέχεια εξέτασε την συμμετρία ενός μοντέλου Hamilton μέσω διαφορομορφισμών. Η Χαμιλτονιανή συμμετρία είναι ένα ζευγάρι διαφορομορφισμών που υπακούν στις εξισώσεις Χάμιλτον, ένας μετασχηματισμός, ο οποίος αφήνει το σύστημα στην αρχική μορφή του. Υπάρχουν φυσικές δράσεις όπως η στροφή και η μεταφορά ή και πιο «αφηρημένες» όπως η *χρονικά αναστρέψιμη συμμετρία*. Σύμφωνα με το Θεώρημα της Noether, μια απειροελάχιστη συμμετρία του Χαμιλτονιανού συστήματος με εξωτερικές δυνάμεις, παράγει ένα νόμο διατήρησης για το σύστημα. Τέλος, αναφέρει πως όταν η εξωτερική



συμπεριφορά ενός συστήματος είναι χρονικά αναστρέψιμη τότε το Χαμιλτονιανό σύστημα θα συμπεριφέρεται ακριβώς το ίδιο.

Ο J S W Lamb<sup>[2]</sup>, 9 χρόνια αργότερα (1992), αναφέρθηκε στις αντιστρέψιμες συμμετρίες στα δυναμικά συστήματα. Παρουσίασε μια ομάδα αντιστρέψιμων συμμετριών όπου κάθε ασθενής αντιστρέψιμη απεικόνιση μπορεί να αναλυθεί σε δύο απεικονίσεις της ίδιας σειράς. Ασθενές αντιστρέψιμο ονομάζεται το δυναμικό σύστημα όπου δεν απαιτείται να πληροί την αντιστρέψιμη συμμετρία. Στη συνέχεια αναλύθηκαν τα δυναμικά συστήματα με διακριτό και συνεχή χρόνο όπου:

Έστω  $M$  μία συμμετρία. Τότε για ένα δυναμικό σύστημα με συνεχή χρόνο, της μορφής

$$\frac{d}{dt}x = Fx \quad (1.1)$$

θα ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}(Mx) = F * Mx \quad (1.2)$$

ενώ για σύστημα με διακριτό χρόνο, της μορφής

$$x' = Lx \quad (1.3)$$

θα έχουμε

$$Mx' = L * Mx \Leftrightarrow M * L = L * M \quad (1.4)$$

Ακολουθεί η θεώρηση ομάδων αντιστρέψιμων συμμετριών όπου κατόπιν μιας αλληλουχίας δέκα προτάσεων προκύπτουν δύο θεωρήματα:

Σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα, όλες οι σημαντικά ασθενείς αντιστρέψιμες απεικονίσεις  $L$ , όπως αυτές που δεν έχουν πεπερασμένο όριο αλλά έχουν αντιστρέψιμη συμμετρία, διαθέτουν μία αντιστρέψιμη ομάδα συμμετριών που έχει μία ισόμορφη υποομάδα.

Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα, κάθε σημαντικά ασθενής αντιστρέψιμη απεικόνιση  $L$  μπορεί να αναλυθεί σε δύο χαρτογραφήσεις της σειράς  $2^1$ . Ακόμη παρουσιάζονται σχετικές εφαρμογές όπως ότι οι αντιστρέψιμες απεικονίσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση περιοδικών τροχιών.

Ο Jeroen S.W Lamb και ο John A.G. Roberts<sup>[3]</sup> στο άρθρο τους δίνουν μια σύντομη αναφορά στη χρονικά αντιστρέψιμη συμμετρία των δυναμικών συστημάτων και τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις τους. Το θέμα αναλύεται σε τέσσερις ενότητες όπου: στην πρώτη γίνεται αναφορά στη θέση των χρονικά αντιστρέψιμων συμμετριών στη φυσική, στη δεύτερη προσδιορίζονται οι χρονικά αντιστρέψιμες συμμετρίες στα δυναμικά συστήματα και η σχέση τους με τα Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα, στην τρίτη στα αντιστρέψιμα δυναμικά συστήματα και σε άλλες σχετικές θεωρίες και στην τέταρτη στις εφαρμογές τους στη φυσική και τα μαθηματικά. Πιο αναλυτικά η πρώτη ενότητα χωρίζεται σε τρεις υποενότητες:

- Για την χρονικά αντιστρέψιμη συμμετρία στην Κλασσική Μηχανική, δίνεται παράδειγμα με ένα εκκρεμές που έχει μηδενική απώλεια ενέργειας εξαιτίας της έλλειψης τριβής (ιδανική θεώρηση) όπου αν κατά την κίνηση του τραβηχτούν πολλά στιγμιότυπα και προβληθούν ξανά, δε θα παρατηρείται καμία διαφορά είτε προβληθούν κανονικά είτε ανάποδα. Με τη θεώρηση τριβής στο παράδειγμα, δεν παρατηρείται το ίδιο. Επισημαίνεται εδώ πως αν κατά την κίνηση ενός συστήματος δεν είναι σαφές αν αυτό κινείται κανονικά ή ανάποδα τότε το σύστημα έχει χρονικά αντιστρέψιμη συμμετρία.
- Για τη θερμοδυναμική δίνεται ένα παρόμοιο παράδειγμα με μόρια αέρα. Γίνεται επίσης αναφορά στο παράδοξο του Loschmidt, που αντιτίθεται στο δεύτερο νόμο του Boltzmann.
- Για την κβαντική μηχανική ο Wigner εισήγαγε ένα σύστημα όπου εξήγησε το διπλό εκφυλισμό των ενεργειακών σταθμών που παρατηρήθηκε από τον Kramers.

Στη δεύτερη ενότητα δίνεται πιο ακριβής μαθηματική προσέγγιση με τη θεώρηση δύο τύπων δυναμικών συστημάτων, ο ένας με συνεχή χρόνο ( $t \in \mathbb{R}$ ) και ο άλλος με διακριτό χρόνο ( $t \in \mathbb{Z}$ ). Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνεται, ένα δυναμικό σύστημα καλείται αντιστρέψιμο όταν παρουσιάζει αντιστρέψιμη συμμετρία και ικανοποιεί συγκεκριμένες σχέσεις για αυτόνομες ροές, απεικονίσεις ή μη-αυτόνομες ροές. Έπειτα παρουσιάζονται παραδείγματα από τα οποία παρατηρείται πώς: η αντιστρεψιμότητα στο χρόνο προκύπτει από μία φυσική υπόθεση της χρονικής αντιστρεψιμότητας από τις εξισώσεις κίνησης, η αντιστρεψιμότητα στο χώρο προκύπτει από τη φυσική θεώρηση των χωρικών συμμετριών σε ένα φυσικό μοντέλο, και επίσης ότι η αντιστρεψιμότητα προκύπτει υπό μία θεώρηση για μία συγκεκριμένη δομή σε ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Τα αντιστρέψιμα δυναμικά συστήματα μπορούν να παρατηρηθούν από δύο διαφορετικές οπτικές, είτε από την οπτική της συμμετρίας ως αντιστρέψιμα συστήματα που προσδιορίζονται υπό όρους συμμετρίας, είτε υπό το πλαίσιο των Χαμιλτονιανών συστημάτων.

Γίνεται επίσης αναφορά στις διαφορές αντιστρέψιμων και ισοδύναμων δυναμικών, στη συμμετρία  $K$  και τη χωροχρονική συμμετρία, στις διαφορές μεταξύ αντιστρέψιμων και Χαμιλτονιανών δυναμικών.

Στην τρίτη ενότητα αναλύονται οι πτυχές των αντιστρέψιμων δυναμικών οι οποίες είναι:

- Οι συμμετρικές περιοδικές τροχιές για τις οποίες δίνεται ο ορισμός και τρία θεωρήματα, το πρώτο αφορά τις συμμετρικές τροχιές για ροές, το δεύτερο τις

συμμετρικές τροχιές για απεικονίσεις και το τρίτο τις οικογένειες των συμμετρικών τροχιών περιοδικών τροχιών.

- Οι ιδιότητες σταθερότητας των συμμετρικών τροχιών, που αφορούν γραμμικά αντιστρέψιμα συστήματα.
- Το κεντρικό θεώρημα του Liapunov που έχει αντιστρέψιμη αναλογία και περιγράφει την ύπαρξη οικογενειών των συμμετρικών περιοδικών τροχιών στη γειτονιά ενός ελλειπτικού συμμετρικού σημείου 0 ενός πεδίου διανυσμάτων  $F$  στον  $R^{2n}$  με αντιστρέψιμη συμμετρία  $R$ .
- Η θεωρία KAM (Kolmogorov-Arnol'd-Moser) που περιγράφει την διάχυση κατά τον διαχωρισμό αμετάβλητων τόρων, που αποτελεί ημιπεριοδική κίνηση σε σχεδόν ολοκληρώσιμα δυναμικά συστήματα.
- Η θεωρία τοπικής διακλάδωσης.
- Οι κανονικές μορφές Birkhoff σύμφωνα με τις οποίες γίνεται θεώρηση επέκτασης του διαφορομορφισμού Taylor ή πεδίου διανυσμάτων σε ένα σταθερό σημείο και βρίσκεται ένα τοπικό πλαίσιο, στο οποίο το ανάπτυγμα Taylor δείχνει απλό σε κανονική μορφή.
- Η διακλάδωση σταθερής κατάστασης των αντιστρέψιμων συστημάτων.
- Η διακλάδωση σε κέντρα συντονισμού,
- Η υποαρμονική διακλάδωση,
- Η αντιστρέψιμη κρίσιμη ροπή Krein,
- Η εκ νέου κανονικοποίηση και κλιμάκωση.
- Οι αντιστρέψιμες ομοκλινικές και ετεροκλινικές, όπου σχηματίζουν ενώσεις μεταξύ σαγματικών σημείων και αποτελούν επαναλαμβανόμενη μεταφορά μέσω δυναμικών συστημάτων.

Στην τέταρτη ενότητα παρουσιάζονται τα αντιστρέψιμα δυναμικά συστήματα στη φυσική και τα μαθηματικά. Αναλύονται σε τρεις κατηγορίες, στην αντιστρεψιμότητα στο χρόνο (μηχανική και θερμοδυναμική μη-ισορροπία), στην αντιστρεψιμότητα στο χώρο (μειώσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων) και στην αντιστρεψιμότητα σε αφηρημένες μαθηματικές ρυθμίσεις. Στην πρώτη αναφέρονται η μεταγωγική χρονική αντιστρεψιμότητα των μηχανικών συστημάτων και τα αντιστρέψιμα μοντέλα για θερμοδυναμική μη-ισορροπία. Η δεύτερη δεν έχει κάποια υποκατηγορία και στην τρίτη αναφέρονται ολομορφικές αντιστοιχίσεις και οι αντιστρέψιμες συμμετρικά ομάδες και αλγεβρικές δομές.

Οι Peter Ashwin, Christian Bick και Oleksandr Burylko<sup>[4]</sup> πραγματεύονται την ανάλυση και την αναστρεψιμότητα των όμοια συζευγμένων δικτύων ταλαντωτών, τις διακλαδώσεις και τις

συμμετρίες τους. Αρχικά εξετάζεται η πλήρως συμμετρική περίπτωση των όμοιων συζευγμένων ταλαντώσεων για μικρό  $N$  και συγκεκριμένη συνάρτηση  $g(\varphi)$ . (2- $\pi$  περιοδική συζευγμένη συνάρτηση)

$$g(\varphi) = -\sin(\varphi - \alpha) \quad (1.5)$$

με το  $\alpha$  να λαμβάνει τιμές  $\pi/2$  και  $3\pi/2$  και να δημιουργούνται «κατακόρυφες» διακλαδώσεις με συγχρονισμό ή μη αντιστοίχως. Με αποτέλεσμα να στοχεύει στην κατανόηση της συμπεριφοράς των διακλαδώσεων για τις δύο πιο γενικές αρμονικές συναρτήσεις.

Αμέσως μετά, εξετάζεται η περίπτωση που ο όρος  $g(\varphi)$  είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση,

$$g(\varphi) = g(-\varphi) \quad (1.6)$$

Στην περίπτωση αυτή, καταδεικνύονται διάφορα περίεργα φαινόμενα όπως η παρατήρηση χαοτικών ελκυστών και καταστάσεις χίμαιρας. Είναι επίσης γνωστό πως υπάρχουν  $N-2$  ανεξάρτητα ομαλά κινητικά ολοκληρώματα για κάθε  $N \geq 3$  για την ειδική περίπτωση όπου

$$g(\varphi) = \cos(\varphi) \quad (1.7)$$

Στην περίπτωση όπου  $N=4$ , η μορφή του  $g$  δεν είναι πλήρως ολοκληρώσιμη.

Εφόσον δοκιμάστηκαν τα μοντέλα για μερικές παραμέτρους και συμμετρίες φάσεων, έγινε προσπάθεια για μείωση της δυναμικής σε μια δυναμικά αμετάβλητη περιοχή. Επιπλέον εξετάστηκαν κάποιες περιπτώσεις ισορροπίας και διακλαδώσεων των περιοδικών τροχιών όπως όταν είναι σε συγχρονισμό, σε αντίθετη φάση και σε κατάσταση 2 συμπλεγμάτων (2 cluster state) όπως η ισοτροπία, από τον τύπο συμμετρίας. Αυτές επιλύθηκαν με σύστημα 3 και 4 ταλαντωτών επεκτείνοντας την ανάλυση των διακλαδώσεων σε 2<sup>η</sup> αρμονική μορφή σύζευξης και χαρακτήρισαν την διακλάδωση των 2 συμπλεγμάτων ως την ορίζουσα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης.

Τέλος εξετάστηκαν οι συνέπειες των άρτιων και περιττών συναρτήσεων  $g(\varphi)$  για μικρούς όρους  $N$ . Όταν η συνάρτηση είναι περιττή, τότε δημιουργείται μια μη-μόνιμη ροή. Στην αντίθετη περίπτωση, υπάρχουν επιπλέον χρονικά αναστρέψιμες συμμετρίες για τις διάφορες φάσεις του συστήματος και μηδενική απόκλιση. Όταν το  $N=3$  ή  $N=4$ , τότε υπάρχουν σημαντικά χρονικά αναστρέψιμες συμμετρίες. Η σχέση ολοκλήρωσης και σύζευξης περιορίζει σημαντικά την δυναμική για  $N \geq 4$  και μετατρέπει σε δύο-ημιπεριοδικές συχνότητες την συνάρτηση.

Οι Leonardo Colombo, William Clark, Anthony Bloch<sup>[5]</sup> το 2018 εξέτασαν την συμπεριφορά των συστημάτων Χάμιλτον για απλά υβριδικά μηχανικά συστήματα και τον ρόλο των χρονικά αναστρέψιμων συμμετριών και των μηδενικών υβριδικών δυνάμεων στην προσπάθεια να αποδείξουν την ύπαρξη περιοδικών τροχιών στα συστήματα αυτά.

Υποστήριξαν πως η δυναμική για συστήματα που χρησιμοποιούν οιονεί ταχύτητες (quasi-velocities) είναι στην ουσία εξισώσεις Hamel. Η έννοια των χρονικά αναστρέψιμων συμμετριών παίζει σημαντικό ρόλο στις εξισώσεις Χάμιλτον, οι οποίες είναι αναλλοίωτες υπό τον μετασχηματισμό:

$$(q, p, t) \rightarrow (q, -p, -t) \quad (1.8)$$

Έτσι, μία δεδομένη τροχιά στο χώρο με εξίσωση μορφής:

$$\gamma(t) = (q(t), p(t)) \quad (1.9)$$

και με αρχικές συνθήκες:

$$\gamma_0 = q_0, p_0 \quad (1.10)$$

και

$$\beta_0 = (q_0, -p_0) \quad (1.11)$$

έχει και λύση της μορφής:

$$\beta(t) = (q(-t), -p(-t)) \quad (1.12)$$

Επομένως, στον χώρο, όταν έχουμε μία τροχιά  $q(t)$ , υπάρχει και αντίστοιχη τροχιά  $q(-t)$ .

Αυτή την αρχή χρησιμοποίησαν οι ως άνω ερευνητές για την έρευνα τους για τις περιοδικές λύσεις στα απλά υβριδικά Χαμιλτονιανά συστήματα ελέγχου. Έδειξαν πως επιβάλλοντας χρονικά-αναστρέψιμες συμμετρίες στα απλά Χαμιλτονιανά υβριδικά συστήματα, μπορούν να έχουν περιοδική κίνηση στην δυναμική των υποπολλαπλάσιων υβριδικών συστημάτων.

Προσομοίωσαν την κίνηση ενός ποδιού που περπατά ως ένα ανεστραμμένο μη-γραμμικό εκκρεμές με δύο μάζες ( $m = m_1 + m_2$ , όπου  $m_1$  είναι η μάζα του ανθρώπινου σώματος και  $m_2$  η μάζα του κατώτερου άκρου) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Hamel με μηδενική αρχική δύναμη για την δυναμική ενέργεια του συστήματος και ο διανυσματικός χώρος προκύπτει ως:

$$X_{\mathcal{H}} = (K(\mu_x - \mu_\theta l \cos \theta), 0, -l \sin \theta (gm_1 + K\mu_x \mu_\theta)) \quad (1.13)$$

Σε συνέχεια του παραδείγματος αυτού, προσπάθησαν να προσομοιώσουν το «γλίστρημα» στο κινούμενο πόδι μέσα από αποσβεστικούς όρους στις οιονεί ταχύτητες, θέτοντας ελέγχους στο σύστημα, το οποίο καταλήγει στην εξής μορφή:

$$\dot{\mu}_x = -\frac{1}{b}\mu_x, \quad \dot{\mu}_\theta + l \sin \theta (gm_1 + K\mu_x \mu_\theta) = \omega, \quad (1.14\alpha)$$

$$\dot{x} - K(\mu_x - \mu_\theta l \cos \theta) = 0, \quad \dot{\theta} - K(Jl^3 \mu_\theta - \mu_x l \cos \theta) = 0 \quad (1.14\beta)$$

Τέλος, τονίστηκε πως επιβάλλοντας συμμετρίες στον διανυσματικό χώρο των μοντέλων Χάμιλτον μπορούν να περιγραφούν τα δυναμικά φαινόμενα των υβριδικών αυτών συστημάτων και να οδηγήσουν στην εύρεση περιοδικών κινήσεων στην υβριδική δυναμική.

Το κύριο πλεονέκτημα είναι ότι μπορούμε να βρούμε τις περιοδικές τροχιές μόνο εξετάζοντας το σύστημα Χάμιλτον και τον χάρτη επιρροής του χωρίς να γίνουν υπολογισμοί.

## Βιβλιογραφία

- [1] A. J. van der Schaft (1983). Symmetries, conservation laws, and time reversibility for Hamiltonian systems with external forces. J. Math. Phys. **24**(8), pp. 2095-2101.  
<https://doi.org/10.1063/1.525962>
- [2] J. S. W. Lamb (1992). Reversing symmetries in dynamical systems. J. Phys. A: Math. Gen. **25** (925), pp. 925-937. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/4/028>
- [3] J. S.W. Lamb, John A.G . Roberts (1998). Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. Physica D **112**(1-2), pp. 1-39.  
[https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00199-1](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00199-1)
- [4] St. Wiggins (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Hamiltonian Vector Fields **14**, pp.197-226. <https://doi.org/10.1007/b97481>
- [5] P. Ashwin, C.Bick and O. Burylko (2016). Identical Phase Oscillator Networks: Bifurcations, Symmetry and Reversibility for Generalized Coupling. Front. Appl. Math. Stat. **2**(7), pp.1-16. <https://doi.org/10.3389/fams.2016.00007>
- [6] L. Colombo, W. Clark, A. Bloch (2018). Time reversal symmetries and zero dynamics for simple hybrid Hamiltonian control systems. 2018 Annual American Control Conference (ACC). <https://doi.org/10.23919/ACC.2018.8431672>

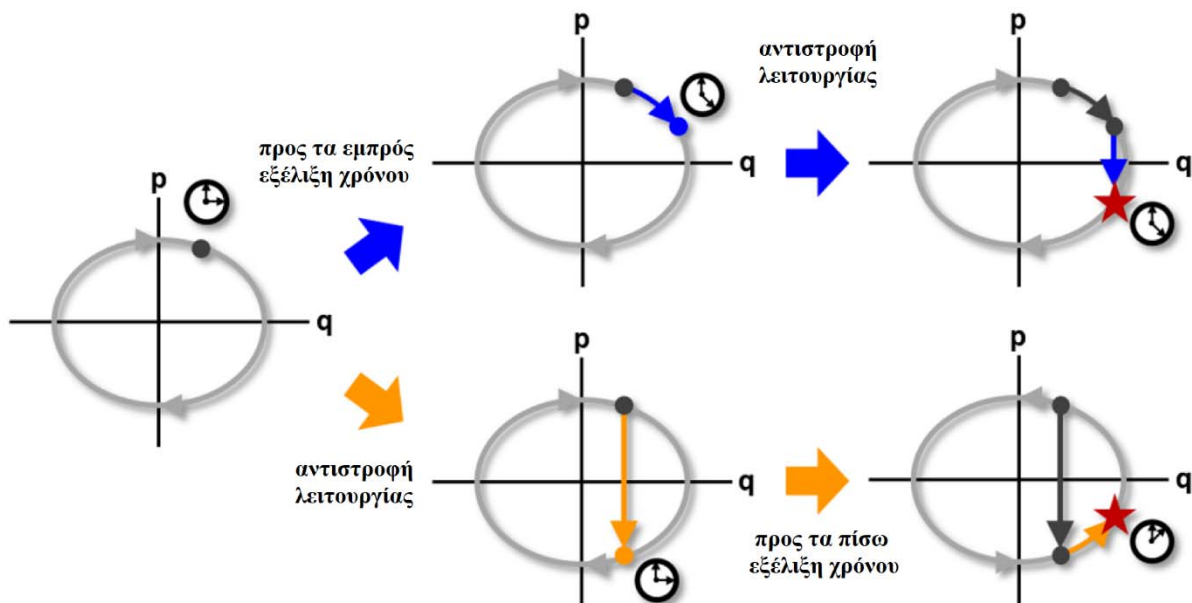
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> : Απλά Δυναμικά Συστήματα με Συμμετρίες

### Αναστροφής Χρόνου της Μηχανικής

#### 2.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί ανάλυση απλών Δυναμικών Συστημάτων, τα οποία παρουσιάζουν διαφόρων ειδών συμμετρίες με επικέντρωση στις συμμετρίες αναστροφής χρόνου.

Πριν επιχειρηθεί η ανάλυση απλών δυναμικών συστημάτων στο τρέχον Κεφάλαιο, αλλά και περίπλοκων του επόμενου Κεφαλαίου, κρίνεται σκόπιμο να υπενθυμιστεί απλουστευμένα η έννοια της συμμετρίας αναστροφής χρόνου. Προς τούτο, στο Σχήμα 2.1, παρατίθεται μια απλή σχετική αναπαράσταση, η οποία ερμηνεύεται παρακάτω.



Σχήμα 2.1 Απλή αναπαράσταση της έννοιας συμμετρίας αναστροφής χρόνου σε δυναμικά συστήματα

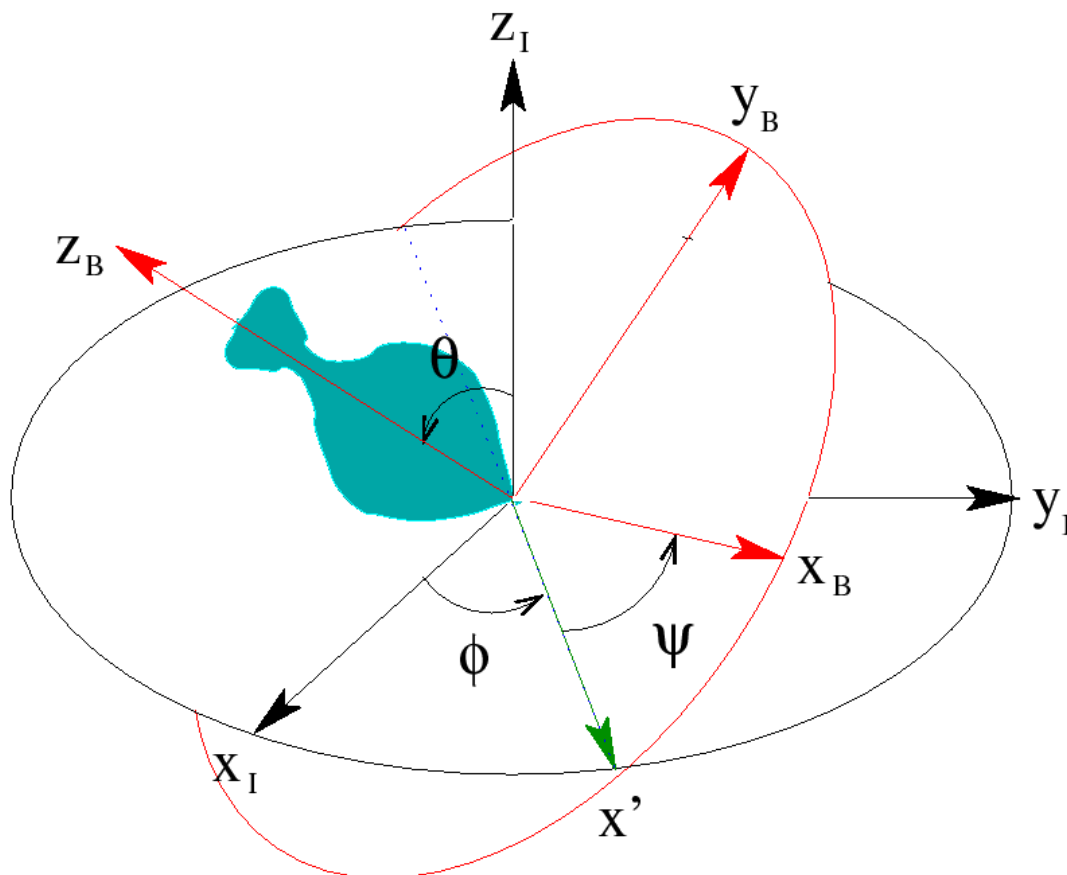
Έστω ότι το αριστερό γράφημα – γκρι έλλειψη – αναπαριστά μια τροχιά  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  του χώρου φάσης ενός δυναμικού συστήματος. Αν αυτό χαρακτηρίζεται από συμμετρία αναστροφής χρόνου, τότε η τροχιά δεν αλλάζει για  $t \mapsto -t$ . Αντιστροφή της προς τα εμπρός εξέλιξης του χρόνου (μπλε βέλη) μιας τυχαίας κατάστασης οδηγεί σε μια ίδια κατάσταση, που προκύπτει από την προς τα πίσω εξέλιξη του χρόνου της αντιστραφείσας κατάστασης (κίτρινα βέλη).



### 2.1.1 Ο Στρόμβος (Σβούρα) που περιστρέφεται περί σταθερό σημείο

Πρόκειται από τα κλασσικά προβλήματα δυναμικής στερεού σώματος <sup>[1,3,4]</sup>, το οποίο έχει απασχολήσει την προσοχή των ερευνητών από την εποχή του Euler. Εδώ θα παρατεθεί ανάλυση που αφορά διαφόρων μορφών συμμετρίες, με έμφαση στην σχετική συμμετρία αναστροφής χρόνου, καθόσον τούτο αποτελεί ουσιαστικά ένα συνεχές δυναμικό σύστημα (διανυσματικό πεδίο) με πολλές ιδιαιτερότητες. Η προσέγγιση του όλου προβλήματος θα γίνει με βάση τις γενικευμένες ενεργές γωνιακές συντεταγμένες του Euler. Θα μορφωθεί η Lagrangian και η Hamiltonian, και από αυτές θα προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης του προβλήματος – διανυσματικού πεδίου, και θα καταδειχθεί η πιθανή δυναμική απόκριση. Στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί θεωρητική ανάλυση με σκοπό να προκύψει συμμετρία αναστροφής χρόνου, και τέλος θα δοθούν αριθμητικές λύσεις προκειμένου να επαληθευθεί η χρονική συμμετρία του υπό εξέταση συνεχούς δυναμικού συστήματος.

Θεωρούμε συνεπώς τον στρόμβο του Σχήματος 2.2, όπου καταδεικνύονται τόσο οι κύριοι Καρτεσιανοί άξονες στον τρισδιάστατο χώρο όσο και οι γωνίες Euler. Το εν λόγω στερεό σώμα περιστρέφεται χωρίς τριβή στη βάση του, χωρίς δυνατότητα ολίσθησης στο οριζόντιο επίπεδο. Οι άξονες με δείκτη I είναι οι αδρανειακοί.



Σχήμα 2.2 Στρόμβος περιστρεφόμενος περί σταθερό σημείο



2.1.1α Αρχική – Κλασσική Ανάλυση

Το σταθερό σημείο θα χρησιμοποιηθεί ως η αρχή των αξόνων. Η περιστροφή περί το σημείο αυτό μέσω των γωνιών Euler  $\theta, \varphi, \psi$  υποδηλώνει πως όλη η κινητική ενέργεια  $T$  περιέχεται στην περιστροφή αυτή, οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$T = T_{rot} \quad (2.1)$$

Για έναν συμμετρικό στρόμβο, που γενικά ισχύει, η κινητική ενέργεια με όρους περιστροφής περί τους κύριους άξονες ισούται με

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I^{(i)} \omega_i^2 \quad (2.2)$$

όπου  $I^{(i)}$  οι ροπές αδράνειας του στερεού ως προς τους επιλεγέντες κύριους άξονες.

Αυτές πάντως δεν μορφώνουν διάνυσμα. Εύκολα βρίσκει κανείς ότι το διάνυσμα  $\vec{\omega}$  δίνεται από την έκφραση

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (2.3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ του αδρανειακού άξονα  $z$  και του άξονα  $z$  στο χώρο περιστροφής, η συνολική δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$U = mgh \cos \theta \quad (2.4)$$

όπου  $h$  το ύψος του κέντρου μάζας του στρόμβου μέχρι την κορυφή του.

Σημειώτέο ότι επειδή ο στρόμβος θεωρείται συμμετρικός ως προς τον κατακόρυφο άξονα του, θα ισχύει προφανώς ότι  $I^{(2)} = I^{(1)} = I^{(12)}$ , οπότε η κινητική ενέργεια λαμβάνει τη μορφή

$$T = \frac{1}{2} I^{(12)} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I^{(3)} \omega_3^2 \quad (2.5)$$

Αναλυτικότερα, στην ανωτέρω έκφραση, από την (2.3) θα γίνει αντικατάσταση των παρακάτω:

$$\omega_1^2 = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 \quad (2.6\alpha)$$

που αναπτύσσεται σε

$$\omega_1^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi \quad (2.6\beta)$$

$$\omega_2^2 = (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 \quad (2.6\gamma)$$

που αναπτύσσεται σε

$$\omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi \quad (2.6\delta)$$

Οπότε, αθροίζοντας τις σχέσεις (2.6β) και (2.6δ) προκύπτει ότι

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \quad (2.6\epsilon)$$

ενώ ισχύει επίσης ότι,

$$\omega_3^2 = (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (2.6\sigma\tau)$$

Με βάση όλα τα παραπάνω, η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{1}{2}I^{(12)}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I^{(3)}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (2.7)$$

και η *Lagrangian* γράφεται κατά τα γνωστά τελικά ως

$$L = \frac{1}{2}I^{(12)}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I^{(3)}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgh \cos \theta \quad (2.8)$$

Οι εξισώσεις κίνησης του στρόμβου προκύπτουν από την εξίσωση Euler - Lagrange, η γενική έκφραση της οποίας είναι

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.9)$$

όπου  $q_i$  οι γενικευμένες συντεταγμένες του εκάστοτε προβλήματος.

Καθόσον η *Lagrangian* δεν εξαρτάται κυκλικά από την  $\varphi$  ή την  $\psi$  οι σχετικές στροφορμές διατηρούνται. Αν  $p_\varphi$  είναι η στροφορμή ως προς τον άξονα  $\hat{z}_I$  και  $p_\psi$  η στροφορμή ως προς τον άξονα  $\hat{z}_B$ , τότε θα ισχύει ότι

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I^{(12)} \sin^2 \theta + I^{(3)} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I^{(3)} \cos \theta \dot{\psi} = \text{σταθερά} \quad (2.10\alpha)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I^{(3)}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{σταθερά} \quad (2.10\beta)$$

Λόγω των (2.10α) και (2.10β) οι  $p_\varphi$  και  $p_\psi$  τίθενται ως *αρχικές συνθήκες* στο πρόβλημα. Και επειδή οι τιμές τους είναι σταθερές, δυνάμεθα να λύσουμε τις εξισώσεις ως προς  $\dot{\phi}$  και  $\dot{\psi}$ , που οδηγεί στα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I^{(12)} \sin^2 \theta} \quad (2.11\alpha)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I^{(3)}} - \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I^{(12)} \sin^2 \theta} \quad (2.11\beta)$$

Υφίστανται πάντως και άλλες δύο εξισώσεις κίνησης, αλλά είναι πιο εύκολο να αντιληφθεί κανείς την κίνηση του στρόμβου χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνολικής ενέργειας σε συνδυασμό με τις δύο σταθερές στροφορμές ως άνω.

Η συνολική ενέργεια  $E$  ισούται με

$$E = \frac{1}{2}I^{(12)}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I^{(3)}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgh \cos \theta \quad (2.12)$$

ή λόγω της (2.10β)

$$E = T + V = \frac{1}{2}I^{(12)}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I^{(3)}} + mgh \cos \theta \quad (2.13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την (2.10α) τελικά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I^{(3)}} = \frac{1}{2}I^{(12)}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I^{(12)} \sin^2 \theta} \quad (2.14)$$

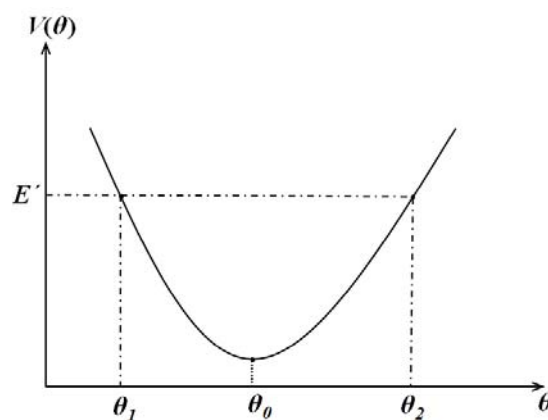
οπότε

$$E' = E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I^{(3)}} = \frac{1}{2} I^{(12)} \dot{\theta}^2 + V(\theta) = \text{σταθερό} \quad (2.15)$$

Αυτό μοιάζει πολύ με πρόβλημα κεντρικής δύναμης (central force problem), με τη μάζα να ταλαντώνεται εμπρός – πίσω στο δυναμικό. Η τιμή της  $\dot{\theta}$  μηδενίζεται στα όρια. Η κίνηση περιορίζεται μεταξύ των γωνιών εκείνων  $\theta_1$  και  $\theta_2$  για τις οποίες

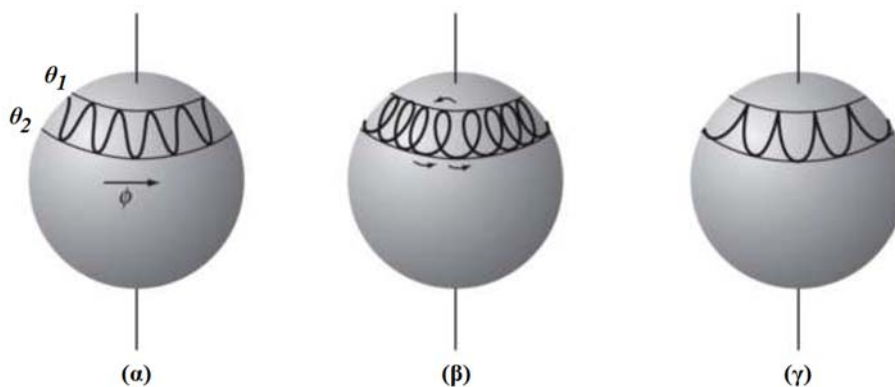
$$E' = E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I^{(3)}} = V(\theta) \quad (2.16)$$

Αυτή η ταλάντωση του  $\theta$ , καθώς η στροφορμή προπορεύεται καλείται *κλόνιση* (nutation, μια περιοδική διακύμανση στην κλίση του άξονα ενός περιστρεφόμενου αντικειμένου) αλλά και *μετάπτωση*. Στο Σχήμα 2.3 αναπαρίσταται η κατάσταση της κλόνισης.



Σχήμα 2.3 Διάγραμμα  $\theta - V(\theta)$  για τον στρόμβο

Οι τρεις διαφορετικές μορφές *μετάπτωσης* της περιστροφής του στρόμβου καταγράφονται στο Σχήμα 2.4, η δε περιβάλλουσα τους εξαρτάται από τις τιμές των  $\theta_1$  και  $\theta_2$ , γωνιών με το αυτό γεωγραφικό πλάτος. Η περίπτωση (α) καλείται *μονής κατεύθυνσης*, η δεύτερη (β) *βρόχου* και η τρίτη (γ) *ακτινική*.



Σχήμα 2.4 Περιστροφή στρόμβου, με τρεις διαφορετικές μορφές μετάπτωσης (precession)

Επιπρόσθετα, η Χαμιλτονιανή του συστήματος, ισούται με

$$H = \frac{p_\theta^2}{2I^{(12)}} + \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{2I^{(12)} \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I^{(3)}} + mgh \cos \theta \quad (2.17)$$

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, οι άλλες δύο εξισώσεις κίνησης του προβλήματος θα έχουν ως εξής, στις οποίες η  $p_\theta$  είναι η στροφορμή ως προς τη γωνία  $\theta$ .

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I^{(12)}} \quad (2.18\alpha)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)(p_\varphi \cos \theta - p_\psi)}{I^{(12)} \sin^3 \theta} + mgh \sin \theta \quad (2.18\beta)$$

Τελικά πρόκειται για ένα διανυσματικό πεδίο τεσσάρων διαστάσεων, που διέπεται από τις (2.11α,β) και (2.18α,β), οι οποίες για λόγους εποπτείας έχουν συνολικά ως:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I^{(12)}} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I^{(12)} \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{I^{(3)}} - \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I^{(12)} \sin^2 \theta} \\ \dot{p}_\theta &= \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)(p_\varphi \cos \theta - p_\psi)}{I^{(12)} \sin^3 \theta} + mgh \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.19\alpha-\delta)$$

Προφανώς, το σύστημα αυτό επιδέχεται μόνο αριθμητικών λύσεων, και συνδέεται με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= \text{εξωτερικά εισαγόμενο} = a \\ p_\varphi(0) &= p_\psi(0) \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0 \\ p_\theta(0) &= \text{εξωτερικά εισαγόμενο} = b \Rightarrow \dot{\theta}(0) = \frac{b}{I^{(12)}} \\ \dot{p}_\theta(0) &= mgh \sin \theta(0) = mgha \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Για την ποιοτική θεωρητική διαπίστωση περί της χρονικής και άλλης συμμετρίας του συστήματος, καταστρώνεται απλοποιημένο πρόγραμμα στο *Mathematica*, όπου πραγματοποιούνται ορισμένες απλουστευτικές αντικαταστάσεις. Η λίστα του και τα αποτελέσματα του φαίνονται παρακάτω, μέσω *equation editor*.

Λίστα και αποτελέσματα *Mathematica* <sup>[5]</sup> απλουστευμένου συμβολικού υπολογισμού της *Lagrangian* και της Δράσης *I* (ως Παράρτημα Α)

```
ClearAll[c1, c2, c3, c4, c5, c5, θ, f1, f2, II, Lang, c6, II, t]
Print["Αντικαθιστούμε για ευκολία c1=pφ, c2=pψ, c3=I(12), c4=I(3), c5=c2/c4, c6=mgh"]
Print["Εδώ f1[θ] είναι η dφ/dt και f2[θ] η dψ/dt"]
f1[θ[t]] = (c1 - c2 * Cos[θ[t]]) / (c3 * Sin[θ[t]]^2);
f2[θ[t]] = c5 - f1[θ[t]] * Cos[θ[t]];
```

(\*Lagrangian\*)

Lang =

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{1}{2} * c3 * (f1[\theta[t]]^2 * \sin[\theta[t]]^2 + (\partial_t \theta[t])^2) + \frac{1}{2} * c4 * (f1[\theta[t]] * \cos[\theta[t]] + f2[\theta[t]])^2 - c6 * \cos[\theta[t]]\right]$$

TrigReduce[%]

II = FullSimplify[ $\int \text{Lang} d\theta[t]$ ]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( c4 c5^2 - 2 c6 \cos[\theta[t]] + \right. \\ & \quad \left. c3 \left( \frac{(c2 \cot[\theta[t]] - c1 \csc[\theta[t]])^2}{c3^2} + \theta'[t]^2 \right) \right) \\ & \frac{1}{4 c3} \left( 2 c3 c4 c5^2 - 4 c3 c6 \cos[\theta[t]] - \right. \\ & \quad 4 c1 c2 \cot[\theta[t]] \csc[\theta[t]] + 2 c1^2 \csc[\theta[t]]^2 + \\ & \quad \left. c2^2 \csc[\theta[t]]^2 + c2^2 \cos[2 \theta[t]] \csc[\theta[t]]^2 + 2 c3^2 \theta'[t]^2 \right) \\ & \frac{1}{2 c3} \left( - (c1^2 + c2^2) \cot[\theta[t]] + 2 c1 c2 \csc[\theta[t]] - \right. \\ & \quad \left. 2 c3 c6 \sin[\theta[t]] + \theta[t] (-c2^2 + c3 c4 c5^2 + c3^2 \theta'[t]^2) \right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε συνεπώς ότι, τελικά, τόσο η *Lagrangian* όσο και η δράση (εξίσωση A.2.2 – Παράρτημα Α) εξαρτώνται αποκλειστικά από τη γωνία  $\theta$ . Τούτο σημαίνει ότι υφίσταται ομογένεια του χώρου ως προς δύο γωνίες *Euler*, αλλά και χωρική ισοτροπία ως προς δύο κατευθύνσεις. Απομένει ναδειχθεί και η επιθυμητή χρονική ομογένεια, για να εφαρμοστεί πλήρως το θεώρημα της *Noether*.

### 2.1.1β Ανάλυση με το λογισμικό Mathematica [5]

Θεωρούμε εκ νέου ένα αξονικά συμμετρικό στερεό σώμα (έναν στρόμβο) μάζας  $M$ , μ παράλληλες και κάθετες (σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας του στερεού) ροπές αδράνειας ίσες με  $J_{\parallel}$  και  $J_{\perp}$  αντίστοιχα. Το αναγκάζουμε να περιστραφεί περί τον άξονα του, τοποθετούμε την κάτω άκρη του (συνήθως κεκλιμένου) άξονα του πάνω σε ένα μη ολισθηρό οριζόντιο επίπεδο, και το αφήνουμε να συνεχίσει την κίνηση του, υποκείμενο στο κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας. Υποθέτουμε ότι το κέντρο μάζας του στρόμβου βρίσκεται σε

απόσταση  $r$  από το σημείο επαφής, ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι η  $g$ , και ότι δεν υφίσταται τριβή.

Για να ερευνήσουμε την κίνηση του στρόμβου, εισάγουμε ένα σύστημα αδρανειακών συντεταγμένων, με την αρχή του να τοποθετείται στο σημείο επαφής και τον άξονα  $z$  να κατευθύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Αρχικά, ο στρόμβος τοποθετείται, χωρίς να κινείται, κατακόρυφα στην επιφάνεια του δαπέδου και κατόπιν του επιβάλλεται μια πλήρως γενική, χρονικά εξαρτώμενη περιστροφή  $\mathbb{R}$ , που παραμετροποιείται από τρεις γωνίες *Euler*, ως εξής:

$$\mathbb{R} = e^{\mathbb{k}\phi/2} \circ e^{\mathbb{i}\theta/2} \circ e^{\mathbb{l}\psi/2} \quad (2.21)$$

όπου  $\phi$  είναι μια ραγδαία αυξάνουσα συνάρτηση του χρόνου που αναπαριστά την πραγματική περιστροφή του στρόμβου περί τον άξονα συμμετρίας του (αυτή η περιστροφή επιβάλλεται πρώτη), ακολουθούμενη από κλίση του στρόμβου υπό γωνία  $\theta$  (ενδεχομένως μια αργά μεταβαλλόμενη χρονικής συνάρτησης) περί την αδρανειακή κατεύθυνση  $x$ , ακολουθούμενη ακόμα μέσω αργής περιστροφής της κεκλιμένης κορυφής περί τον  $z$ , προκαλώντας έτσι το φαινόμενο της *μετάπτωσης*. Στην (2.21) τα  $\mathbb{i}$ ,  $\mathbb{j}$  (μη εμφανιζόμενο) και  $\mathbb{k}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των διευθύνσεων  $x$ ,  $y$ ,  $z$  αντίστοιχα.

Οι διέπουσες το πρόβλημα εξισώσεις κίνησης θα βρεθούν, όπως και πριν, μέσω της τεχνικής του *Lagrange*, ως προς τις τρεις γωνίες *Euler*. Η κινητική ενέργεια του στρόμβου ισούται με το ένα δεύτερο του εσωτερικού γινομένου της γωνιακής του ταχύτητας επί της στροφορμής του, καθόσον η κίνηση είναι καθαρά περιστροφική. Η εν λόγω έκφραση είναι

$$\frac{J_{\parallel}\omega_z^2 + (J_{\perp} + Mr^2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2} \quad (2.22)$$

όπου  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  είναι οι συνιστώσες του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς (rotating-frame) των  $\omega$ .

Στο εξής, λόγω συμμετρίας η  $J_{\perp}$  θα γράφεται ως  $J$  και η  $J_{\parallel}$  ως  $J_3$ . Η ποσότητα  $J_{\perp} + Mr^2$  είναι η ροπή αδράνειας του στρόμβου ως προς μια γραμμή κάθετη στον άξονα συμμετρίας του, που περνά από την αρχή των αξόνων (που μετατοπίζεται κατά  $r$  από το κέντρο μάζας). Συνήθως ισχύει ότι  $J > J_3$ , αλλά τα αποτελέσματα που θα ληφθούν εδώ ισχύουν και για  $J \leq J_3$ . Αφαιρώντας την δυναμική ενέργεια  $Mgr \cos \theta \equiv Jm \cos \theta$ , η *Lagrangian*  $L$  (*Mathematica*) λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \{1, 0, 0\}; \mathbf{j} = \{0, 1, 0\}; \mathbf{k} = \{0, 0, 1\}; \\
\mathbf{R} &= (\text{PQExp}[\mathbf{k} / 2 \phi[t]] \circ \text{PQExp}[\mathbf{i} / 2 \theta[t]]) \circ \text{PQExp}[\mathbf{k} / 2 \psi[t]]; \\
\omega &= (2 \mathbf{D}[\mathbf{R}, t] \circ \bar{\mathbf{R}})[[2]]; \\
\mathbf{L} &= \{J, J, J_3\} . \omega^2 / 2 - J m \text{Cos}[\theta[t]] // \text{Simplify} \\
\frac{1}{2} & \left( -2 J m \text{Cos}[\theta[t]] + J \theta'[t]^2 + \right. \\
& \left. J \text{Sin}[\theta[t]]^2 \psi'[t]^2 + J_3 (\phi'[t] + \text{Cos}[\theta[t]] \psi'[t])^2 \right)
\end{aligned}$$

Επειδή το αποτέλεσμα δεν περιέχει τις γωνίες  $\phi$  και  $\psi$  (παρά μόνο τις χρονικές τους παραγώγους), οι αντίστοιχες τιμές των  $\frac{\partial L}{\partial \phi}$  και  $\frac{\partial L}{\partial \psi}$  είναι σταθερές στην κίνηση. Η εξίσωση που πλέον απομένει λαμβάνεται από τη σχέση

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (2.23)$$

που δίδει

$$\begin{aligned}
\mathbf{cm}_1 &= \mathbf{D}[\mathbf{L}, \phi'[t]] // \text{Simplify} \\
\mathbf{cm}_2 &= \mathbf{D}[\mathbf{L}, \psi'[t]] // \text{Simplify} \\
\mathbf{eq} &= \mathbf{D}[\mathbf{D}[\mathbf{L}, \theta'[t]], t] - \mathbf{D}[\mathbf{L}, \theta[t]] // \text{Simplify} \\
& J_3 (\phi'[t] + \text{Cos}[\theta[t]] \psi'[t]) \\
& J \text{Sin}[\theta[t]]^2 \psi'[t] + \text{Cos}[\theta[t]] J_3 (\phi'[t] + \text{Cos}[\theta[t]] \psi'[t]) \\
& - \text{Sin}[\theta[t]] (-J_3 \psi'[t] (\phi'[t] + \text{Cos}[\theta[t]] \psi'[t]) + \\
& J (m + \text{Cos}[\theta[t]] \psi'[t]^2)) + J \theta''[t]
\end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες εκφράσεις είναι σταθερές της κίνησης, ενώ η τελευταία πρέπει να ισούται με μηδέν. Εισάγοντας την καινούργια μεταβλητή  $\Phi$  μέσω της σχέσης

$$\dot{\Phi} = \frac{J\dot{\Phi} + (J - J_3)\dot{\psi} \cos \theta}{J_3} \quad (2.24)$$

οι τρεις τελευταίες εκφράσεις απλουστεύονται περαιτέρω. Είναι επίσης σημαντικό να αντιληφθεί κανείς ότι ο μετασχηματισμός της (2.24) αντικαθιστά μόνο την παράμετρο  $\phi$  (ταχύτητα της περιστροφής). Αν ενδιαφερόμαστε για την απόκριση των  $\psi$  και  $\theta$  (που συνήθως γίνεται), λαμβάνουμε την ίδια λύση, ανεξάρτητα αν χρησιμοποιηθεί η  $\phi$  (στο παλαιό σύνολο των εξισώσεων) ή η  $\Phi$  στο νέο σύνολο.

Τα νέα αποτελέσματα θα είναι:

$$\mathbf{cm}_1 = \mathbf{cm}_1 / J /. \phi'[t] \rightarrow (J \Phi'[t] + (J - J_3) \psi'[t] \text{Cos}[\theta[t]]) / J_3 // \text{Simplify}$$



$$cm_2 = cm_2 / J /. \phi' [t] \rightarrow (J \Phi' [t] + (J - J_3) \psi' [t] \cos [\theta [t]]) / J_3 //$$

**simplify**

$$eq = eq / J /. \phi' [t] \rightarrow (J \Phi' [t] + (J - J_3) \psi' [t] \cos [\theta [t]]) / J_3 //$$

**simplify**

$$\Phi' [t] + \cos [\theta [t]] \psi' [t]$$

$$\cos [\theta [t]] \Phi' [t] + \psi' [t]$$

$$-m \sin [\theta [t]] + \sin [\theta [t]] \Phi' [t] \psi' [t] + \theta'' [t]$$

Οι εξισώσεις είναι πλέον πολύ πιο απλές, και ο αριθμός των παραμέτρων μειώθηκε από τρεις σε μία, την  $m$ , με διάσταση  $\text{sec}^{-2}$ .

Εξετάζεται τώρα η πιθανότητα μιας σταθερής λύσης, με μια σταθερά τιμή της  $\theta = \theta_0$  και με

$$\begin{cases} \Phi = \dot{\Phi}_0 t + \Phi_0 \\ \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0 \end{cases} \quad (2.25)$$

όπου  $\dot{\Phi}_0$  και  $\dot{\psi}_0$  είναι δύο σταθερές, το γινόμενο των οποίων πρέπει να είναι ίσο με  $m$ . Για να συσχετιστεί η ταχύτητα μετάπτωσης  $\dot{\psi}_0$  με την πραγματική ταχύτητα περιστροφής, έστω  $\dot{\phi}_0$ , πρέπει να λύσουμε ως προς  $\dot{\psi}_0$  (λόγω της 2.24) την εξίσωση

$$J_3 \dot{\phi}_0 = \frac{mJ}{\dot{\psi}_0} + (J - J_3) \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 \quad (2.26)$$

με το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\dot{\psi}_0 = \frac{J_3 \dot{\phi}_0 \pm \sqrt{(J_3 \dot{\phi}_0)^2 - 4mJ(J - J_3) \cos \theta_0}}{2(J - J_3) \cos \theta_0} \quad (2.27)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί στην συνήθως παρατηρούμενη «αργή» μετάπτωση (υποθέτοντας από δω και μπρος ότι  $\dot{\phi}_0 > 0$ ), ενώ το θετικό οδηγεί σε μια δύσκολα να εμφανιστεί «γρήγορη» μετάπτωση. Αν  $J = J_3$  (σφαιρικά συμμετρικός στρόμβος, λαμβάνουμε μόνο την «αργή» λύση  $\dot{\psi}_0 = m/\dot{\phi}_0$ . Για γρήγορα περιστρεφόμενο στρόμβο, η προηγούμενη σχέση, με αρκετά καλή προσέγγιση, δίδει  $\dot{\psi}_0 = m/J_3 \dot{\phi}_0$  και πρακτικά η ταχύτητα μετάπτωσης είναι ανεξάρτητη από την  $\theta_0$ .

### Προσεγγιστική Λύση

Η πραγματική κίνηση είναι συνήθως περισσότερο περίπλοκη από την «σταθερή» που προγράφηκε προηγούμενα, καθώς η γωνία  $\theta$  μπορεί να υποστεί περιοδικές ταλαντώσεις (κλονίσεις). Υποθέτοντας ότι το πλάτος αυτών είναι μικρό, μπορούμε να



αναπτύξουμε τις τρεις εξαρτημένες μεταβλητές των εξισώσεων μας περί την λύση σταθερής κατάστασης:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_s + \epsilon \theta_1 \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}_s + \epsilon \dot{\psi}_1 \\ \dot{\Phi} &= \frac{m}{\dot{\psi}_s} + \epsilon \dot{\Phi}_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

όπου ο πρώτος όρος σε κάθε δεξί μέλος είναι μια σταθερά, ο δεύτερος όρος παραμένει χρονικά εξαρτώμενος, και το  $\epsilon$  είναι μικρό. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στις τρεις εξισώσεις μας και αμελώντας όρους τάξης μεγαλύτερης από  $\epsilon^2$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \text{aux} &= \{\text{cm}_1, \text{cm}_2, \text{eq}\} /. \{\theta[t] \rightarrow \theta_s + \epsilon \theta_1[t], \theta''[t] \rightarrow \epsilon \theta_1''[t], \\ &\quad \psi'[t] \rightarrow \dot{\psi}_s + \epsilon \dot{\psi}_1'[t], \Phi'[t] \rightarrow m / \dot{\psi}_s + \epsilon \Phi_1'[t]\}; \\ \text{approx} &= \text{Coefficient}[\text{Series}[\text{aux}, \{\epsilon, 0, 1\}], \epsilon] \\ &\left\{ -\sin[\theta_s] \dot{\psi}_s \theta_1[t] + \Phi_1'[t] + \cos[\theta_s] \dot{\psi}_1'[t], \right. \\ &\quad \left. -\frac{m \sin[\theta_s] \theta_1[t]}{\dot{\psi}_s} + \cos[\theta_s] \Phi_1'[t] + \dot{\psi}_1'[t], \right. \\ &\quad \left. \sin[\theta_s] \dot{\psi}_s \Phi_1'[t] + \frac{m \sin[\theta_s] \dot{\psi}_1'[t]}{\dot{\psi}_s} + \theta_1''[t] \right\} \end{aligned}$$

Κάθε μια από τις παραπάνω εκφράσεις πρέπει να είναι ίση με το μηδέν.

Λύνουμε τις δύο πρώτες ως προς  $\dot{\psi}_1'$  και  $\Phi_1'$  και το αποτέλεσμα το αντικαθιστούμε στην τελευταία από αυτές:

$$\begin{aligned} \text{aux} &= \text{Solve}[\{\text{approx}[[1]] == 0, \text{approx}[[2]] == 0\}, \\ &\quad \{\dot{\psi}_1'[t], \Phi_1'[t]\}] // \text{Simplify} \\ \text{approx}[[3]] & /. \text{aux} // \text{Simplify} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \left\{ \dot{\psi}_1'[t] \rightarrow \frac{\csc[\theta_s] \left( m - \cos[\theta_s] \dot{\psi}_s^2 \right) \theta_1[t]}{\dot{\psi}_s}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \Phi_1'[t] \rightarrow \frac{\csc[\theta_s] \left( -m \cos[\theta_s] + \dot{\psi}_s^2 \right) \theta_1[t]}{\dot{\psi}_s} \right\} \right\} \\ &\left\{ \left( -2 m \cos[\theta_s] + \frac{m^2}{\dot{\psi}_s^2} + \dot{\psi}_s^2 \right) \theta_1[t] + \theta_1''[t] \right\} \end{aligned}$$

Η επίλυση στη συνέχεια ως προς  $\theta_1$  (και στη συνέχεια επίσης ως προς  $\psi_1$  και  $\Phi_1$ ) είναι πλέον εύκολη. Σημειωτέο ότι ο συντελεστής του  $\theta_1$  στην τελευταία έκφραση είναι μη-αρνητικός. Επίσης, θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι η  $\dot{\psi}$  θα είναι πάντα θετική (με υπόθεση «αργής» μετάπτωσης), όταν ικανοποιείται η επόμενη συνθήκη:

$$\frac{(m - \cos \theta_s \dot{\psi}_s^2) \epsilon}{\dot{\psi}_s \sin \theta_s} < \dot{\psi}_s \quad (2.29)$$

Αναστρέφοντας την παραπάνω ανισότητα οδηγούμαστε στις καλούμενες *τροχιές βρόχου* - looping orbits (σε όρους της διαδρομής του άξονα, όταν απεικονίζεται στη μοναδιαία σφαίρα), με την ποσότητα  $\dot{\psi}$  να αλλάζει κατεύθυνση περιοδικά. Καθιστώντας την (2.29) σε ισότητα οδηγεί σε ακτινικές τροχιές (cuspidal orbits), κατά τις οποίες όταν η  $\theta$  φτάνει στην μικρότερη τιμή της η  $\dot{\psi}$  μηδενίζεται. Αν απαιτηθεί, μπορεί να βρεθεί λύση με ακρίβεια ανωτέρων τάξεων ως προς  $\epsilon$ .

#### Ακριβής Λύση

Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι η αρχική διαφορική εξίσωση ως προς  $\theta$

$$\ddot{\theta} + \dot{\Phi} \dot{\psi} \sin \theta - m \sin \theta = 0 \quad (2.30)$$

διαθέτει την ακόλουθη σταθερά κίνησης:

$$\mathbf{cm}_3 = \frac{1}{2} \left( \theta' [t]^2 + \psi' [t]^2 + \Phi' [t]^2 \right) + \psi' [t] \Phi' [t] \cos [\theta [t]] + m \cos [\theta [t]] ;$$

που εύκολα επαληθεύεται:

$$\begin{aligned} & D[\mathbf{cm}_3, t] / \theta' [t] /. \\ & \text{Solve}[\{D[\mathbf{cm}_1, t] == 0, D[\mathbf{cm}_2, t] == 0\}, \{\psi'' [t], \Phi'' [t]\}][[1]] // \text{Simplify} \\ & -m \sin [\theta [t]] + \sin [\theta [t]] \Phi' [t] \psi' [t] + \theta'' [t] \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα  $\mathbf{cm}_1$  και  $\mathbf{cm}_2$  με τις αρχικές τιμές τους, μπορούμε να λύσουμε ως προς  $\dot{\psi}$  και  $\dot{\Phi}$ , και κατόπιν να αντικαταστήσουμε στο  $\mathbf{cm}_3$  (μείον τη δική του αρχική τιμή, ώστε η συνολική έκφραση να μηδενίζεται):

$$\begin{aligned} \mathbf{cm}_3 &= \mathbf{cm}_3 - \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 + \dot{\Phi}_0^2 \right) - \dot{\psi}_0 \dot{\Phi}_0 \cos [\theta_0] - m \cos [\theta_0] ; \\ \text{eq} &= \\ & \mathbf{cm}_3 /. \\ & \left( \text{aux} = \text{Solve}[\{\mathbf{cm}_1 == \dot{\Phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos [\theta_0], \mathbf{cm}_2 == \dot{\Phi}_0 \cos [\theta_0] + \dot{\psi}_0\}, \right. \\ & \quad \left. \{\Phi' [t], \psi' [t]\}][[1]] \right) // \text{Simplify}; \end{aligned}$$

Η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση μπορεί να απλουστευθεί μέσω του μετασχηματισμού  $\theta = 2 \cos^{-1} \lambda$ , οπότε προκύπτει ότι

```
eqn = TrigExpand[eq /.  $\theta_0 \rightarrow 2 q$ ] /. { $\dot{\theta}_0 \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \text{ArcCos}[\lambda_0]$ } //
Simplify;
eqn = TrigExpand[eqn /.  $\theta[t] \rightarrow 2 q$ ] /.
{ $\theta'[t] \rightarrow -2 \lambda'[t] / \sqrt{1 - \lambda[t]^2}$ ,  $q \rightarrow \text{ArcCos}[\lambda[t]]$ } //
Simplify;
eqn = Collect[eqn (-1 +  $\lambda[t]^2$ ) / 2 // Simplify, { $\lambda'[t]$ ,  $\lambda[t]$ },
Simplify]
```

με αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2} \lambda_0^2 \left( 2m + \dot{\theta}_0^2 + 2 \lambda_0^2 \dot{\theta}_0 \dot{\psi}_0 + \dot{\psi}_0^2 \right) - \frac{\lambda_0^4 (\dot{\theta}_0 + \dot{\psi}_0)^2}{4 \lambda[t]^2} +$$

$$\frac{1}{4} \left( -4m - \dot{\theta}_0^2 + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_0^2 - 4 \lambda_0^2 (m + \dot{\theta}_0 \dot{\psi}_0) \right) \lambda[t]^2 + m \lambda[t]^4 - \lambda'[t]^2$$

Προς απλούστευση της λύσης που έπεται, υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι ο αρχικός χρόνος επελέγη τέτοιος ώστε να ταυτίζεται με τη στιγμή που η  $\theta$  φτάνει την μέγιστη τιμή της (οπότε  $\dot{\lambda}_0 = 0$ ). Η ανωτέρω εξίσωση μπορεί πλέον να λυθεί, με χρήση συγκεκριμένων αρχικών συνθηκών, που θα πρέπει να ικανοποιούν [λόγω της (2.30)] την ανισότητα  $\dot{\Phi}_0 \dot{\psi}_0 \geq m$ , καθόσον  $\ddot{\theta}_0 \leq 0$ . Εδώ η ποσότητα  $\lambda_{sq}$  δίνει τη λύση ως προς  $\lambda^2$ .

```
{eqcf,  $\Lambda$ , aux} =
{Coefficient[eqn +  $\lambda'[t]^2$ ,  $\lambda[t]$ , {4, 2, 0, -2}],  $\lambda_0^2$ , aux} /.
Thread[{ $\lambda_0$ ,  $\dot{\psi}_0$ ,  $\dot{\theta}_0$ , m} -> {0.85, 1, 3, 1}];
 $\delta = x /. \text{Solve}[0 == \text{eqcf} \cdot \{x^2 + 3 \Lambda x + 3 \Lambda^2, x + 2 \Lambda, 1, 0\}, x][[1]]$ ;
 $\mu = \sqrt{-\text{eqcf} \cdot \{3 \Lambda + \delta, 1, 0, 0\}}$ ;
 $k = \delta \text{eqcf}[[1]] / \mu^2$ ;
 $\lambda_{sq} = \Lambda + \delta \text{JacobiSN}[\mu t, k]^2$ 

0.7225 + 0.156255 JacobiSN[1.60195 t, 0.0608884]^2
```

Αυτή η έκφραση μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί προς τα πίσω στη γωνία  $\theta$ . Έτσι θα βρεθούν τα  $\Phi$  και  $\psi$  μέσω αναλυτικής ολοκλήρωσης των εκφράσεων των  $\dot{\psi}$  και αν είναι επιθυμητό και ως προς  $\dot{\Phi}$ . Τελικά, τα αποτελέσματα μπορούν να αποτυπωθούν και γραφικά, αλλά τούτο (στα πλαίσια του *Mathematica* <sup>[5]</sup>) βρίσκεται εκτός των σκοπών της παρούσας Μεταπτυχιακής Εργασίας.

```


$$\dot{\psi}_{sol} =$$


$$\psi'[t] /. aux /. \{Cos[\theta[t]] \rightarrow 2 \lambda[t]^2 - 1, Cos[\theta_0] \rightarrow 2 \Lambda - 1\} /.$$


$$\{\lambda[t]^2 \rightarrow \Lambda + \delta J, \lambda[t]^4 \rightarrow (\Lambda + \delta J)^2\};$$


$$\psi_{sol} = 3.7 + Apart[\psi_{sol}, J] /.$$


$$\left\{ \frac{c_-}{a_- + b_- J} \rightarrow \right.$$


$$\left( c \text{EllipticPi}\left[-\frac{b}{a}, \text{JacobiAmplitude}[\mu t, k], k\right] \right.$$


$$\left. \left. \text{JacobiDN}[\mu t, k] \right) / \left( a \mu \sqrt{1 - k \text{JacobiSN}[\mu t, k]^2} \right) \right\};$$


$$\theta_{sol} = 2 \text{ArcCos}\left[\sqrt{\lambda_{sq}}\right];$$

Show[ParametricPlot3D[
  {Cos[u] Sin[v], Sin[u] Sin[v], Cos[v]}, {v, 0, Pi},
  {u, 0, 2 Pi}],
ParametricPlot3D[
  Evaluate[{Cos[ψsol] Sin[θsol], Sin[ψsol] Sin[θsol],
    Cos[θsol]}], {t, 0, 10}]]

```

### 2.1.1γ Γραφική – Αριθμητική (Numerical) απόδειξη της ύπαρξης χρονικής συμμετρίας

Προς τούτο επιστρατεύεται το ελεύθερο λογισμικό Dynamics Solver<sup>[2]</sup> και καταστρώνεται πρόγραμμα με τις ακόλουθες γενικευμένες συντεταγμένες, παραμέτρους και αρχικές συνθήκες (σταθερές θεωρούνται οι τιμές  $mgh=10$  και  $I_1=I_3=1$ ):

$$x(1) = \theta, x(2) = \varphi, x(3) = \psi, x_0(1) = \theta_0, x_0(2) = \varphi_0, x_0(3) = \psi_0, x_0(4) = p_{\theta_0}$$

$$x_0(5) = p_{\varphi}, x_0(6) = p_{\psi}$$

και

$$\theta_0 = 0.10, \varphi_0 = 0, \psi_0 = 0, p_{\theta_0} = 1, p_{\varphi} = 9.55, p_{\psi} = 10$$

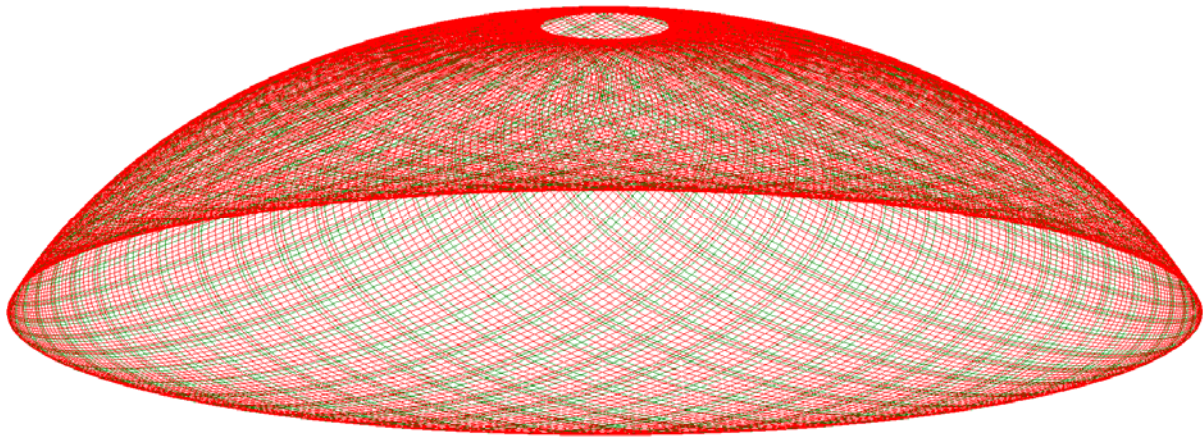
Στη συνέχεια παράγονται γραφήματα προβολών της μορφής

$$\text{projx}(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$

$$\text{projy}(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$

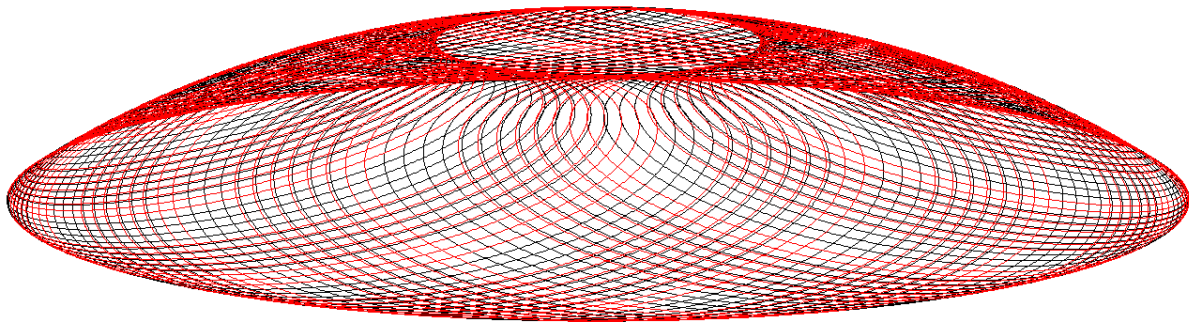
τόσον για  $t \rightarrow +\infty$ , όσον και για  $t \rightarrow -\infty$  και απεικονίζονται ομού στο Σχήμα 2.5, που έπεται.



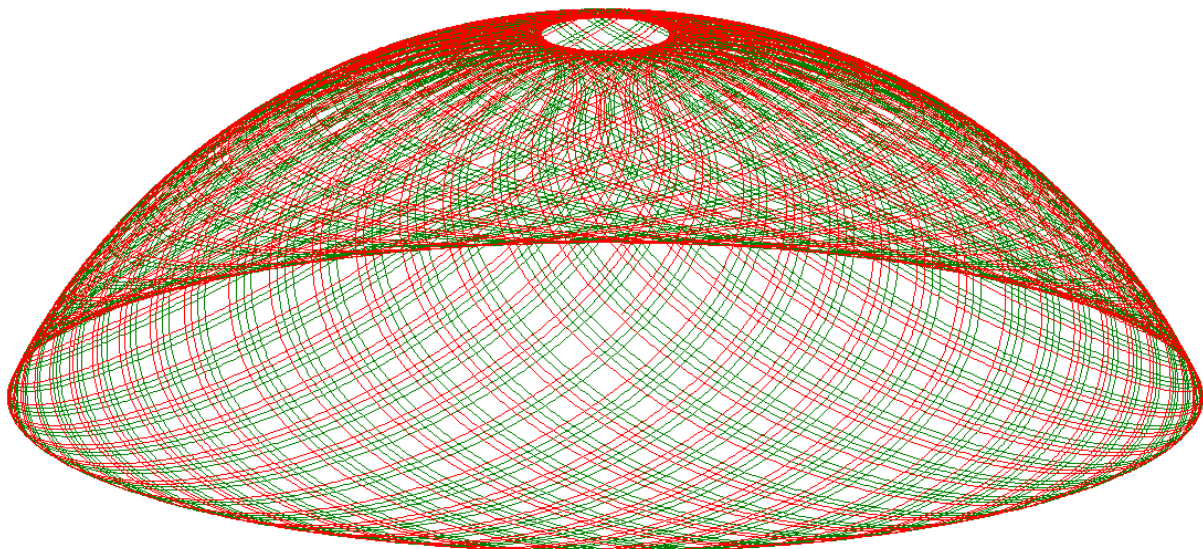


Σχήμα 2.5 Περιστροφή στρόμβου για την προεξάρχουσα μορφή μετάπτωσης, με πλήρη συμμετρία  
αντιστροφής χρόνου:  $t \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow -\infty$

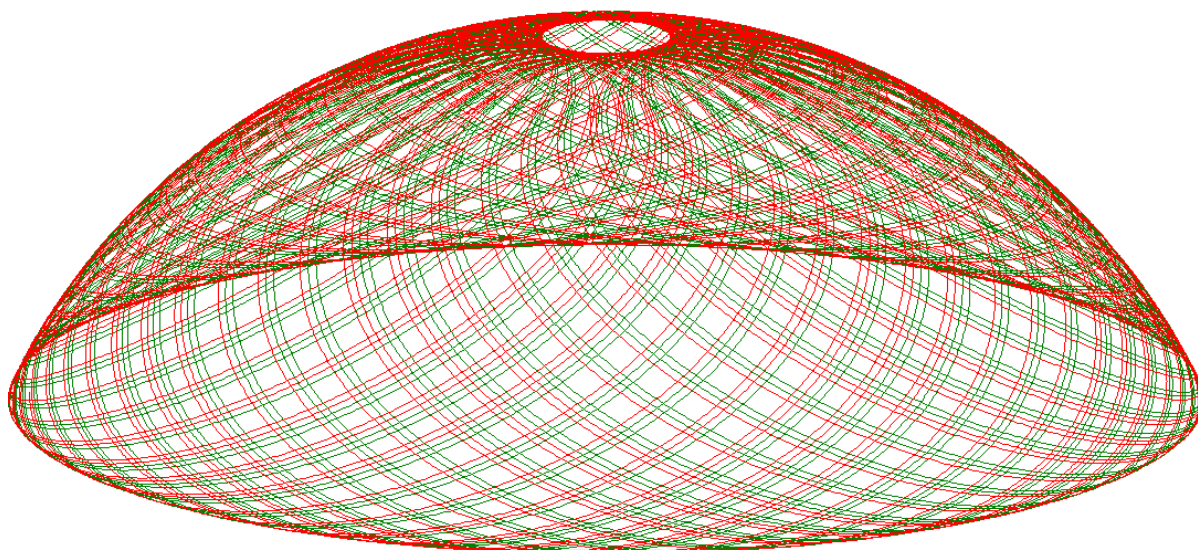
Για οποιαδήποτε αλλαγή αρχικών συνθηκών, διαπιστώθηκε η προαναφερθείσα πλήρης συμμετρία, που φαίνεται στα Σχήματα 2.6 – 2.12.



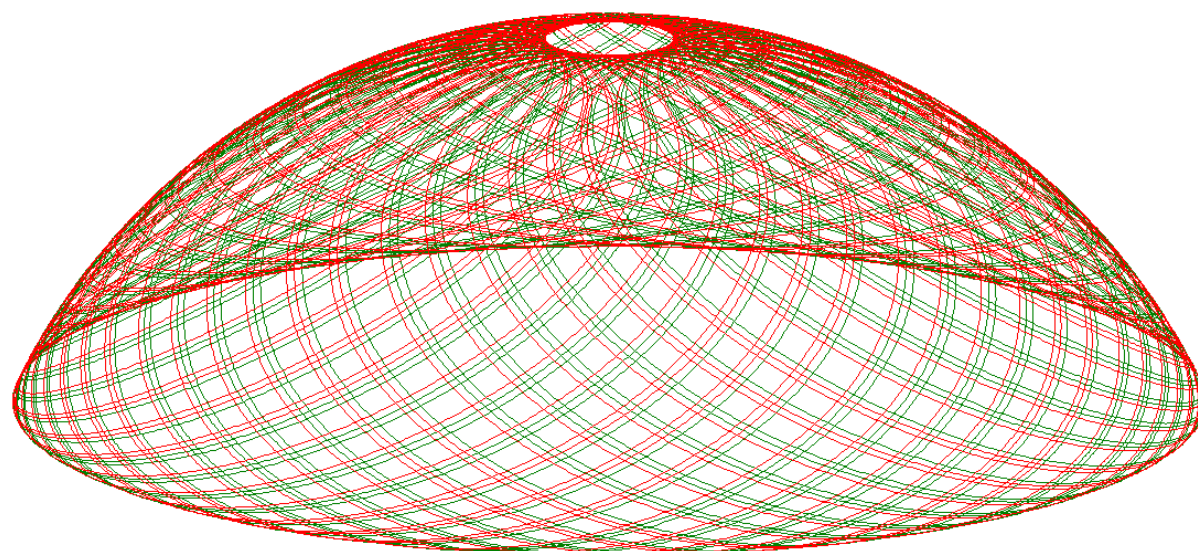
Σχήμα 2.6 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $\theta_0 = 0.20$



Σχήμα 2.7 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $\varphi_0 = 0.10$

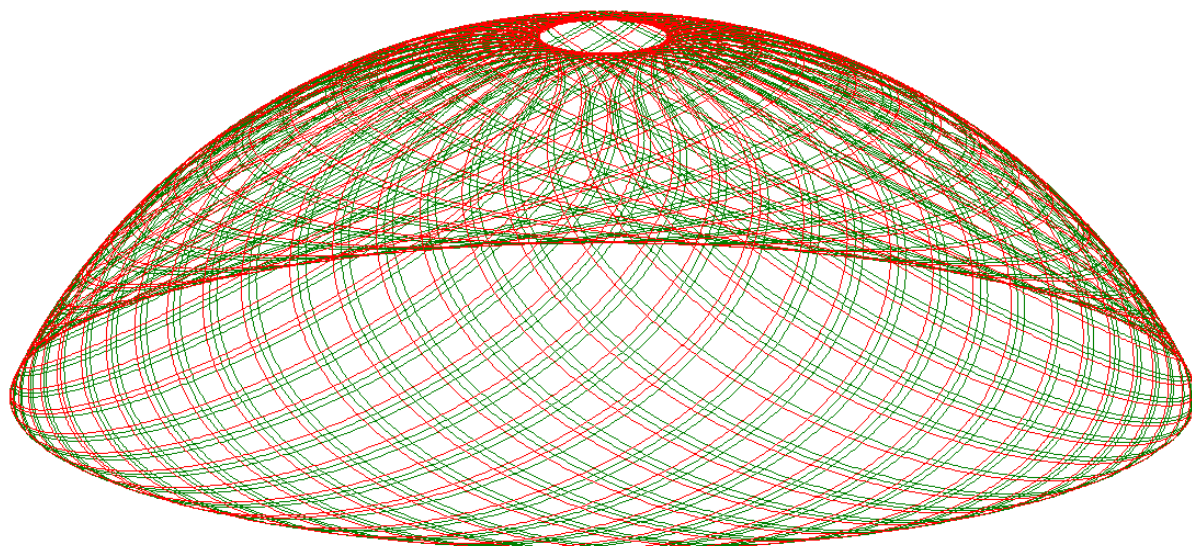


Σχήμα 2.8 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $\varphi_0 = 0.20$

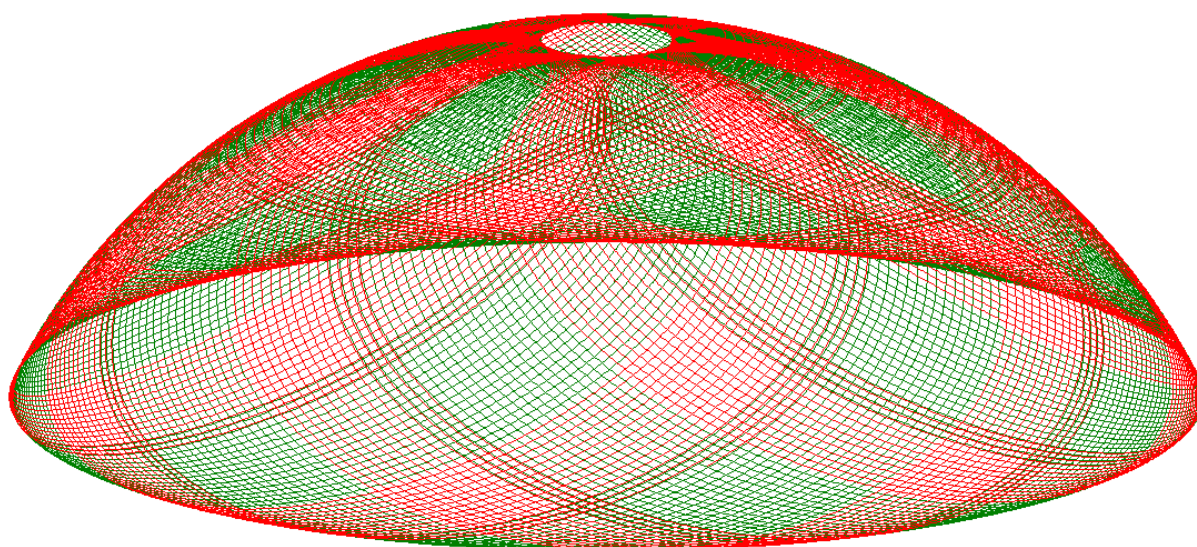


Σχήμα 2.9 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $\psi_0 = 0.10$

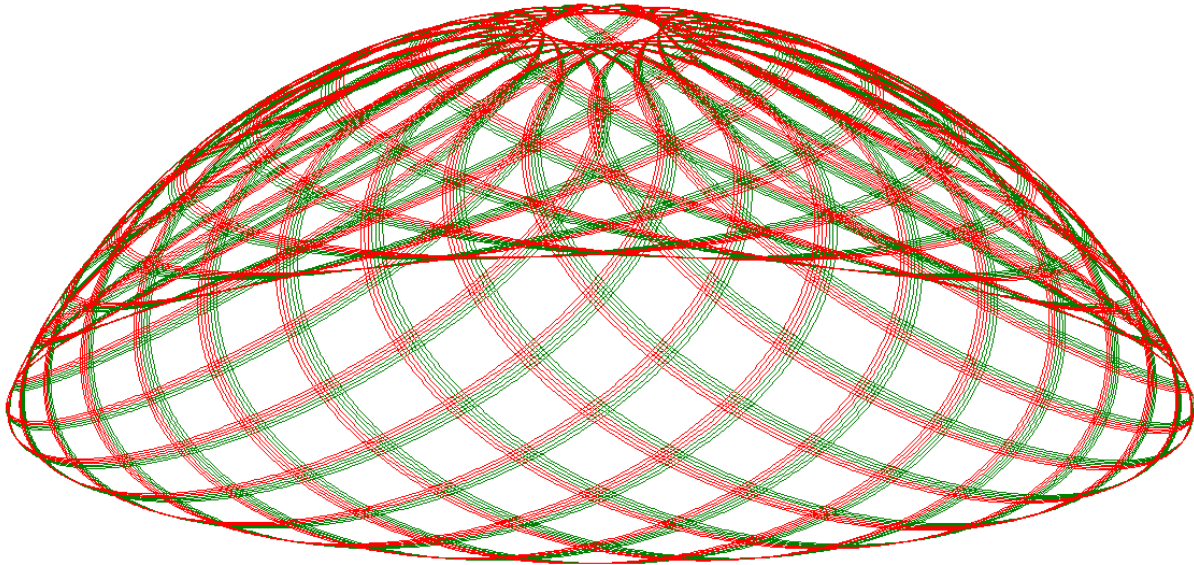




Σχήμα 2.10 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $\psi_0 = 0.20$



Σχήμα 2.11 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $p_{\theta_0} = 0.50$

Σχήμα 2.12 Ως Σχήμα 2.5, αλλά για  $p_{\theta_0} = 2$ 

### **2.1.2 Η εξίσωση – συνάρτηση του Mathieu**

Οι συναρτήσεις Mathieu, και κατ' επέκταση αυτές των Mathieu-Hill έχουν ευρύτατη εφαρμογή στην εύρεση των περιοχών ευστάθειας και αστάθειας παραμετρικά διεγερόμενων ταλαντούμενων κατασκευών, όπως π.χ. τα παραβολικά τόξα χωρίς απόσβεση [6].

Αναλυτικότερα, η διαφορική εξίσωση του Mathieu είναι η

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x)y = 0 \quad (2.31\alpha)$$

που αποτελεί την γενική μορφή της, έτσι όπως αρχικά διατυπώθηκε.

Περαιτέρω, τονίζεται ότι υφίσταται σχετικά μικρός αριθμός αναλυτικών εκφράσεων και ταυτοτήτων σε σχέση με τις συναρτήσεις Mathieu. Επίσης, σε αντίθεση με άλλες ειδικές συναρτήσεις, η λύση της εξίσωσης δεν μπορεί γενικά να εκφραστεί μέσω υπεργεωμετρικών<sup>1</sup> συναρτήσεων. Τούτο καταδεικνύεται αν προβούμε στον μετασχηματισμό της (2.31α) σε αλγεβρική μορφή, αλλάζοντας συντεταγμένη από τη σχέση  $t = \cos x$ , οπότε προκύπτει ότι:

$$(1 - t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + [a + 2q(1 - 2t^2)]y = 0 \quad (2.31\beta)$$

<sup>1</sup>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric_function)  
<https://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html>



Επειδή η συγκεκριμένη Δ.Ε. διαθέτει ένα *ανώμαλο μοναδικό σημείο στο άπειρο*, δεν μπορεί να μετατραπεί σε εξίσωση υπεργεωμετρικού τύπου. Φυσικά, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων με εισαγωγή της μεταβλητής  $t$  δεν είναι τυχαίος, αλλά θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στη συνέχεια.

Πάντως, υφίστανται και άλλες παραλλαγές της εξίσωσης Mathieu, που επιδέχονται επεξεργασίας χωρίς την ύπαρξη ανωμαλιών. Οι συνθήκες υπό τις οποίες αυτές πιθανώς να παρουσιάζουν συμμετρία αναστροφής χρόνου, θα διερευνηθούν στην τρέχουσα ενότητα. Προς τούτο, θεωρούμε την διαφορική εξίσωση ελεύθερου διατοιχισμού<sup>2</sup> (με εφαρμογή στην ευστάθεια πλοίων έναντι κυματισμών), η οποία σε κανονικοποιημένη μορφή έχει ως εξής:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\mu \frac{dx}{dt} + cx \quad (2.32)$$

Η εξίσωση αυτή, καθόσον περιέχει 1<sup>η</sup> παράγωγο ως προς το χρόνο (που υποδηλώνει απόσβεση), επιδεικνύει συνεχή απώλεια ενέργειας. Αν όμως ο όρος της απόσβεσης μηδενιστεί και η (2.32) συνδυαστεί με την (2.31α) προκύπτει μια γενικευμένη εξίσωση Mathieu, που γράφεται ως εξής:

$$\ddot{x}(t) = -[S + \cos \omega t]x(t) \quad (2.33)$$

όπου η τελεία υποδηλώνει παράγωγο ως προς τον χρόνο  $t$ ,  $S$  μια σταθερά δυσκαμψίας μεγαλύτερη του μηδενός και  $\omega$  κάποια συχνότητα διέγερσης.

Η παραπάνω εξίσωση διαθέτει την ακόλουθη λύση, όπως προκύπτει από την εντολή *DSolve* του *Mathematica*:

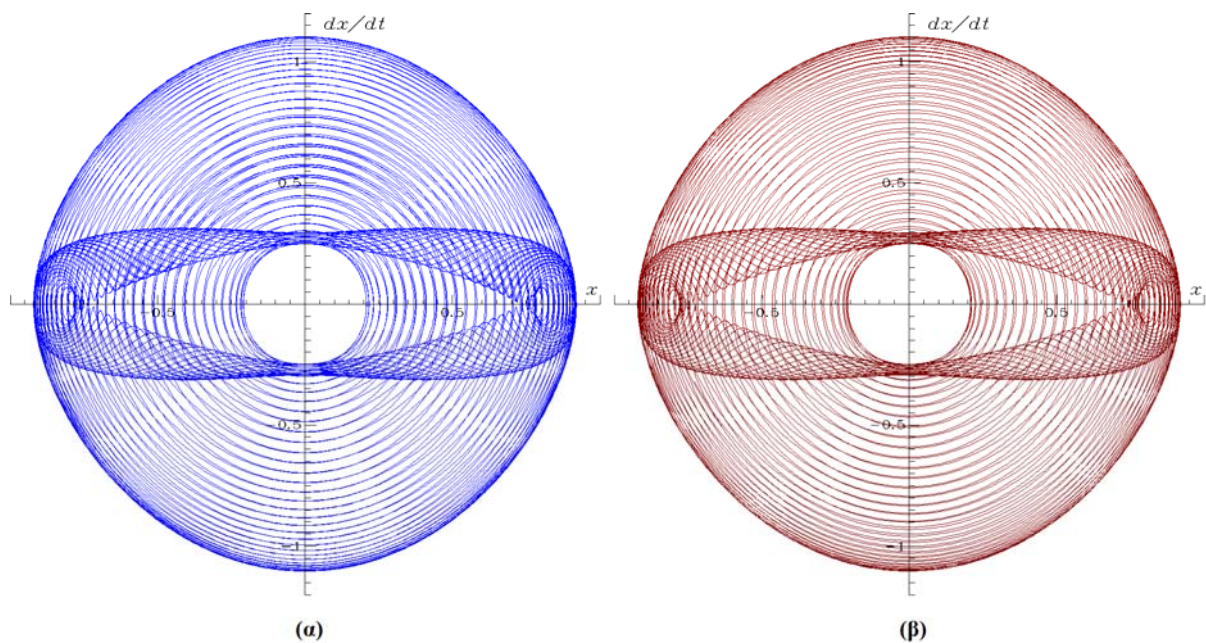
$$\begin{aligned} &\text{ClearAll}[x, t, S, \omega, \text{equ}, \text{ff}] \\ &\text{ff} = -(S + \text{Cos}[\omega * t]); \\ &\text{equ} = \partial_t(\partial_t x[t]) + \text{ff} * x[t]; \\ &\text{DSolve}[\text{equ} == 0, x[t], t] // \text{TraditionalForm} \\ &\{\{x(t) \rightarrow c_1 \text{MathieuC}\left[-\frac{4S}{\omega^2}, \frac{2}{\omega^2}, \frac{t\omega}{2}\right] + c_2 \text{MathieuS}\left[-\frac{4S}{\omega^2}, \frac{2}{\omega^2}, \frac{t\omega}{2}\right]\}\} \\ &x[t] = C[1] \text{MathieuC}\left[-\frac{4S}{\omega^2}, \frac{2}{\omega^2}, \frac{t\omega}{2}\right] + C[2] \text{MathieuS}\left[-\frac{4S}{\omega^2}, \frac{2}{\omega^2}, \frac{t\omega}{2}\right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

<sup>2</sup> <http://artemis.library.tuc.gr/DT2013-0277/DT2013-0277.pdf>

Οι σταθερές  $C[1]$  και  $C[2]$  εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες, ενώ οι ενσωματωμένες συναρτήσεις  $\text{MathieuC}^3$  και  $\text{MathieuS}^4$  του λογισμικού λαμβάνουν ακριβείς τιμές όταν οριστούν αυτές των  $S, \omega$  και το εύρος του χρόνου  $t$ .

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι η *Lagrangian* του συστήματος είναι απλή και αναστρέψιμη, καθόσον η διέπουσα διαφορική εξίσωση δεν σχετίζεται με απώλεια ενέργειας. Λόγω του γεγονότος αυτού επιχειρείται η αριθμητική της επίλυση μέσω του *Dynamics Solver*, τόσο για  $t \rightarrow +\infty$  όσο και για  $t \rightarrow -\infty$ , για διάφορες τιμές των  $S, \omega$  αλλά και αρχικών συνθηκών. Για τους διάφορους συνδυασμούς που προκύπτουν, όπως αυτοί θα παρατεθούν στη συνέχεια, χαράσσονται τα πορτραίτα επιπέδου φάσης  $x(t), \dot{x}(t)$ .

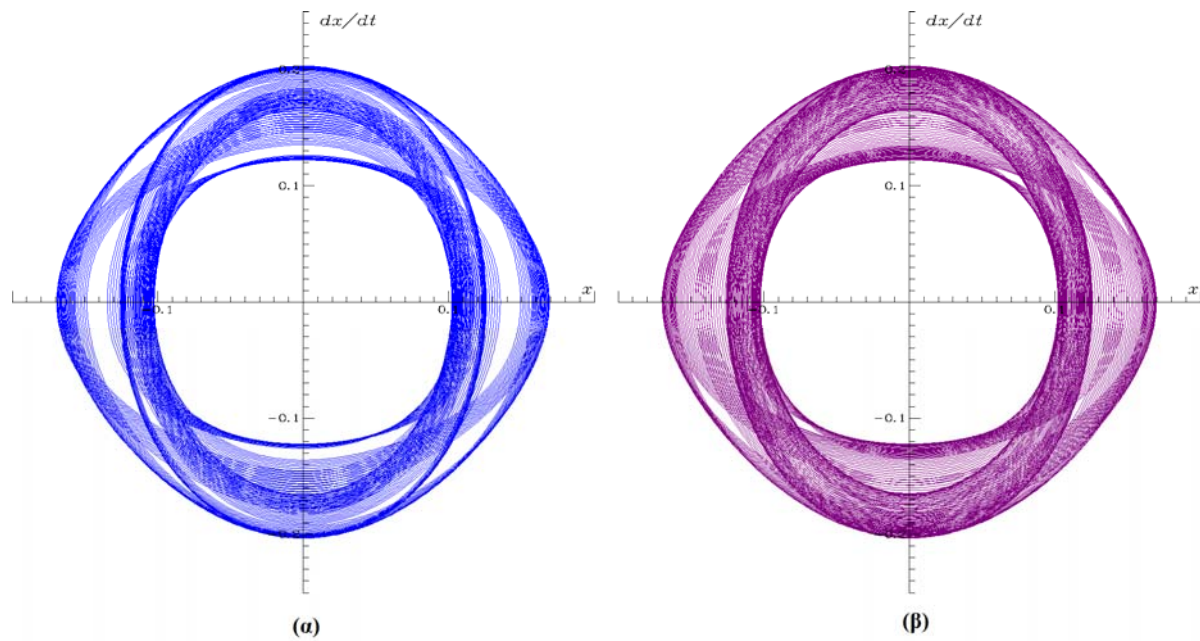
Η πρώτη επιλογή παραμέτρων είναι  $S=0.75, \omega=1.1$  συνδυαζόμενες με αρχικές συνθήκες  $x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.2$ . Για συντομογραφία, ο εν λόγω συνδυασμός καλείται *ΑΠ* και το αποτέλεσμα της επίλυσης φαίνεται στο Σχήμα 2.13.



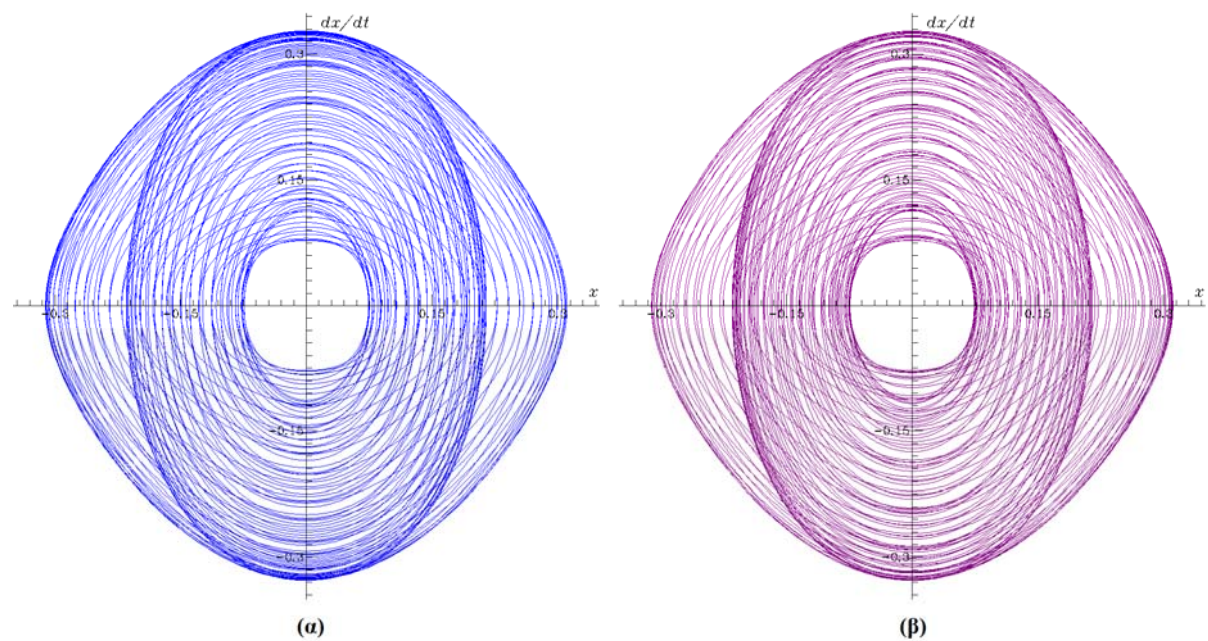
Σχήμα 2.13 Πορτραίτα επιπέδου φάσης  $x(t), \dot{x}(t)$  για την ΑΠ (α)  $t \rightarrow +\infty$ , (β)  $t \rightarrow -\infty$

<sup>3</sup> <https://reference.wolfram.com/language/ref/MathieuC.html>

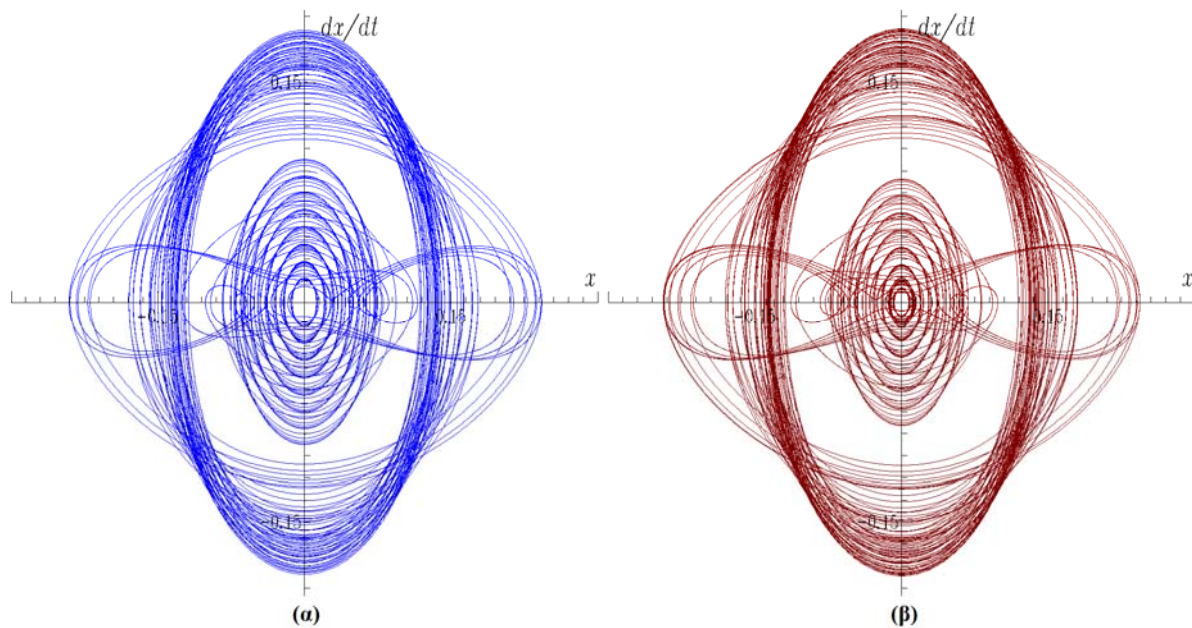
<sup>4</sup> <https://reference.wolfram.com/language/ref/MathieuS.html>



Σχήμα 2.14 Ως Σχήμα 2.13, αλλά για  $x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0.1$

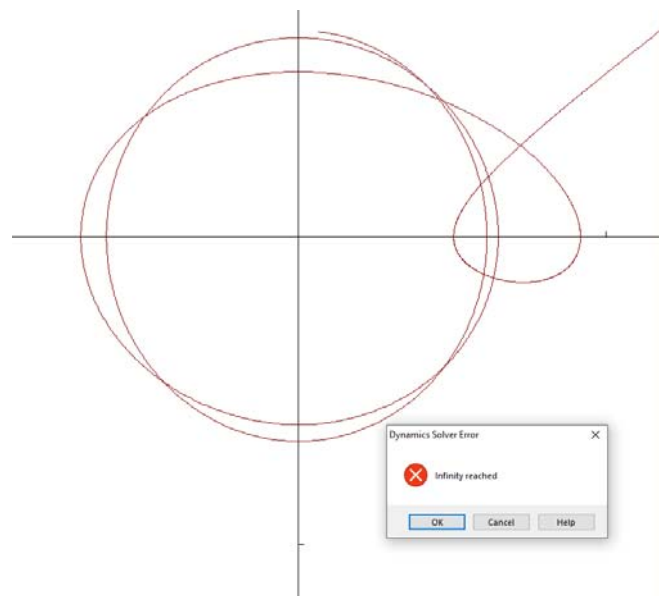


Σχήμα 2.15 Ως Σχήμα 2.14, αλλά για  $S = 0.50$



Σχήμα 2.16 Ως Σχήμα 2.13, αλλά για  $S = 0.9$ ,  $\omega = 0.1$  και πολύ μικρές τιμές των αρχικών συνθηκών

Από τα περιεχόμενα των παραπάνω Σχημάτων καταδεικνύεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές και παρουσιάζει συμμετρία αντιστροφής χρόνου για τις επιλεγείσες τιμές παραμέτρων και αρχικών συνθηκών. Πλην όμως, υπάρχει η πιθανότητα αστάθειας, η οποία οδηγεί σε απειρισμό της συνάρτησης λύσης, όπως χαρακτηριστικά απεικονίζεται στο Σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17 Απειρισμός της συνάρτησης λύσης (αστάθεια) για  $S = 0.2$ ,  $\omega = 0.1$  και μικρές τιμές των αρχικών συνθηκών



Θα μπορούσε κανείς να αναζητήσει τις περιοχές ευστάθειας – αστάθειας του συστήματος, μέσω υπολογισμού των καλούμενων *γλωσσών Arnold*, πλην όμως τούτο ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας Διατριβής.

## Βιβλιογραφία

- [1] R. A. Tenenbaum, (2004). *Fundamentals of Applied Dynamics*. Springer. ISBN 0-387-00887-X.
- [2] *Dynamics Solver*, Freeware for Continuous and Discrete Dynamical Systems, 64 – bit version, Copyright 2015, Juan M. Aguirregabiria, Department of Theoretical Physics, University of the Basque Country, Bilbao (Spain).
- [3] A. Borisov and I. S. Mamaev, (2019). *Rigid Body Dynamics*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics, **52**, 2019. <https://doi.org/10.1515/9783110544442>
- [4] J. V. Jose, E. J. Saletan, (2011). *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press.
- [5] Mathematica Version 12.2 (2020). Wolfram Research Inc., Champaign, Illinois, USA. <https://www.wolfram.com/mathematica>
- [6] D. S. Sophianopoulos, G. T. Michaltsos, (2003). Analytical Treatment of In-Plane Parametrically Excited Undamped Vibrations of Simply Supported Parabolic Arches. *Journal of Vibration and Acoustics (ASME)*, **125**, pp. 73-79. <http://dx.doi.org/10.1115/1.1521952>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> : Ειδικά Διανυσματικά Πεδία και Ειδικές Απεικονίσεις

### 3.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν ειδικά Δυναμικά Συστήματα (απεικονίσεις και διανυσματικά πεδία), τα οποία παρουσιάζουν διαφόρων ειδών συμμετρίες με έμφαση σε αυτής αναστροφής του χρόνου.

### 3.2 Η Κβαντική Απεικόνιση «των Αρτοποιιών» - Quantum Bakers' map <sup>[1]</sup>

Αναφερόμενοι αρχικά στην απεικόνιση των «Αρτοποιιών», πρόκειται περί μιας *χαοτικής* απεικόνισης δύο διαστάσεων του *μοναδιαίου τετραγώνου* στον εαυτό του. Πήρε το όνομα της από τη διαδικασία μορφοποίησης που εφαρμόζουν οι αρτοποιοί στη ζύμη του ψωμιού, πριν το ψήσιμο. Η ζύμη κόβεται στα δύο, και τα κομμάτια μετά τοποθετούνται το ένα πάνω στο άλλο και κατόπιν συμπιέζονται κ.ο.κ. Η εν λόγω απεικόνιση είναι *τοπολογικά συζυγής* με την απεικόνιση του *πετάλου του αλόγου* του Smale, η οποία τυγχάνει εξ ορισμού *χαοτική*.

Η πρώτη βιβλιογραφικά γραφή της εν λόγω απεικόνισης είναι της μορφής

$$x_{n+1} = 2\mu x_n \quad (3.1)$$

όπου το  $x$  είναι υπολογισμένο modulo 1.

Η γενικευμένη έκφραση της απεικόνισης (διάστασης 2) έχει ως:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_a x_n & y_n < a \\ (1 - \lambda_b) + \lambda_b x_n & y_n > a \end{cases} \quad (3.2\alpha)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{y_n}{a} & y_n < a \\ \frac{y_n - a}{\beta} & y_n > a \end{cases} \quad (3.2\beta)$$

όπου  $\beta \equiv 1 - a$ ,  $\lambda_a + \lambda_b \leq 1$ , και τα  $x, y$  υπολογισμένα modulo 1.

Οι (3.2α,β) εύκολα μετασχηματίζονται στη επίσης γενικευμένη απεικόνιση

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a} + \frac{[\beta y_n]}{\beta} \quad (3.3\alpha)$$

$$y_{n+1} = \beta y_n \bmod 1 \quad (3.3\beta)$$

στην οποία, η εντός αγκυλών έκφραση είναι το ακέραιο μέρος του περιεχομένου της.

Ειδικότερα, η σχετική κβαντική απεικόνιση έχει δειχθεί<sup>[1]</sup> ότι διαθέτει, παρόλη τη χαοτική της φύση, *δύο συμμετρίες*: μια *κανονική χωρική συμμετρία* (canonical spatial) και μια *συμμετρία αναστροφής χρόνου* (time-reversal). Η απόδειξη μέσω συμβολικής δυναμικής (symbolic dynamics) είναι εκτός των σκοπών της παρούσας. Πλην όμως, υπάρχει πάντοτε η αξιόπιστη δυνατότητα γραφικής επιβεβαίωσης των παραπάνω συμμετριών, την οποία θα

εκμεταλλευτούμε σε ό,τι ακολουθεί. Προς τούτο θεωρούμε μια παραλλαγή της εξεταζόμενης απεικόνισης, που σχετίζεται με τις παρακάτω εκφράσεις (3.4α-γ):

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n}{a} + \text{int}(by_n)/b \\ y_{n+1} &= by_n \bmod(1) \\ x_{d,n+1} &= \frac{x_{d,n}}{a} + \text{div}(b * y_{d,n}, 1)/b \\ y_{d,n+1} &= by_{d,n} \bmod(1) \end{aligned} \right\} \quad (3.4\alpha)$$

με

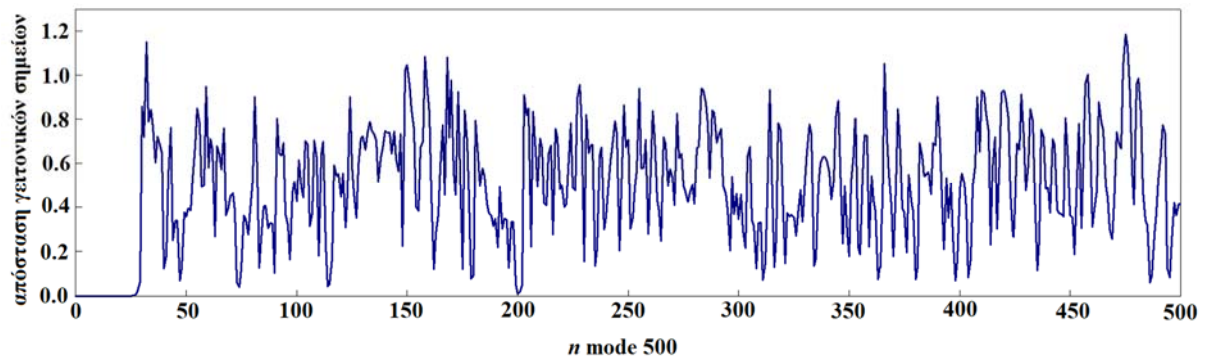
$$\left. \begin{aligned} x_0(n) &= x_0 = 0.1 \\ y_0(n) &= y_0 = 0.1 \\ x_{d0}(n) &= x_0 + \delta X \\ y_{d0}(n) &= y_0 + \delta Y \\ \delta X &= 0 \\ \delta Y &= 1.0e^{-15} \end{aligned} \right\} \quad (3.4\beta)$$

και

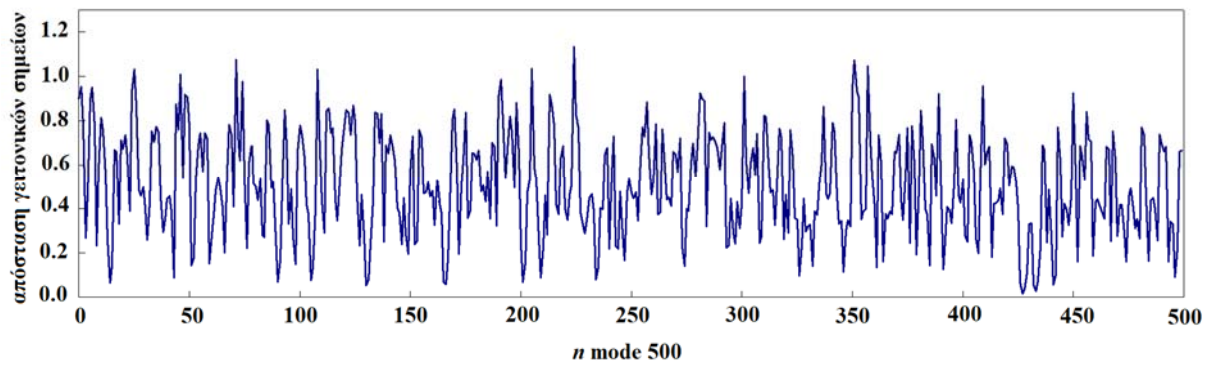
$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0.6 \\ b &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (3.4\gamma)$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε και απεικονίζουμε γραφικά την απόσταση δύο αρχικά γειτονικών σημείων της απεικόνισης, τόσο για  $n \rightarrow +\infty$  όσο και για  $n \rightarrow 0$  (με αρχικές συνθήκες τις τελευταίες της 1<sup>ης</sup> ανάλυσης). Επειδή δε η έννοια του χρόνου σε ένα διακριτό διανυσματικό πεδίο όπως η απεικόνιση θεωρείται εν γένει δύσκολα αντιληπτή, η αναστρεψιμότητα του χρόνου έγκειται στην αντίστροφη λεγόμενη απεικόνιση.

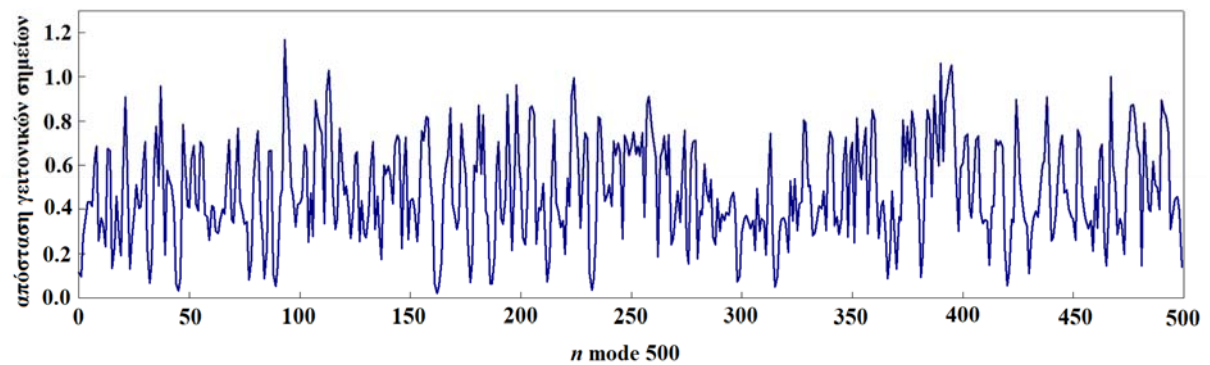
Στη συνέχεια καταδεικνύονται τα σχετικά αποτελέσματα (Σχήματα 3.1 και 3.2), από τα οποία φαίνεται καθαρά η αντιστρεψιμότητα χρόνου της συγκεκριμένης απεικόνισης, αφού τα διαγράμματα για το ίδιο εύρος τιμών του  $n$  ταυτίζονται.



(α)



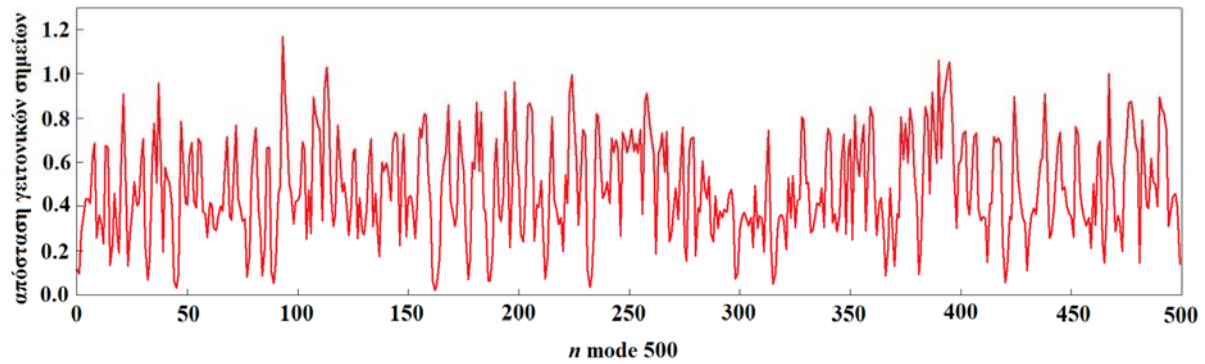
(β)



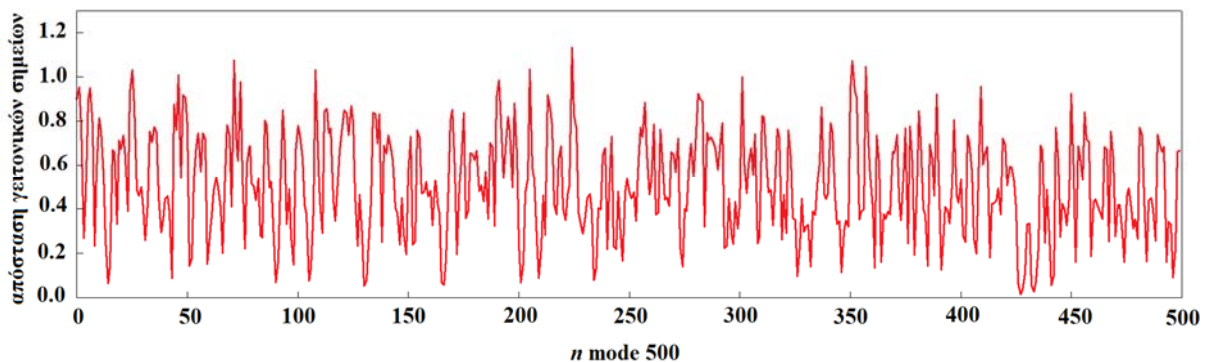
(γ)

Σχήμα 3.1 Αποστάσεις δύο γειτονικών σημείων της απεικόνισης για (α)  $n: 1 \div 500$ , (β)  $n: 501 \div 1000$ , και (γ)  $n: 1001 \div 1500$

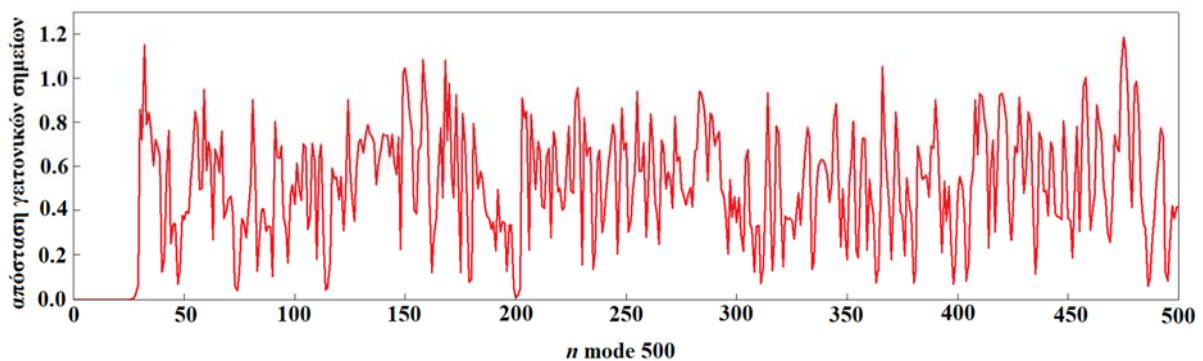




(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 3.2 Αποστάσεις δύο γειτονικών σημείων της απεικόνισης για (α)  $n: 1500 \div 1001$ , (β)  $n: 1000 \div 501$ , και (γ)  $n: 500 \div 1$

### **3.3 Επιρροή του Βήματος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης και της Μεθόδου στον**

#### **Προσδιορισμό της Χρονικής Αναστρεψιμότητας Διανυσματικών Πεδίων**

##### **Διάστασης >2**

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η επιρροή του βήματος ολοκλήρωσης σε συνδυασμό με την εφαρμοζόμενη μέθοδο στην αξιοπιστία αποτελεσμάτων που αφορούν την χρονική αναστρεψιμότητα (συμμετρία) σε σύνθετα διανυσματικά πεδία.

Προς τούτο εξετάζουμε το διανυσματικό πεδίο που αφορά ένα σύστημα δύο στερεών σωμάτων που περιστρέφονται μαζί στο επίπεδο (co-rotating system, όπως π.χ. το σύστημα γης-σελήνης, με διάσταση 4, το οποίο διέπεται από τις ακόλουθες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) \quad (3.5\alpha)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t) \quad (3.5\beta)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = 2v(t) + x(t) - \frac{(1-m)(x(t)+m)}{[(x(t)+m)^2+y(t)^2]^{1.5}} - \frac{m(x(t)-1+m)}{[(x(t)-1+m)^2+y(t)^2]^{1.5}} \quad (3.5\gamma)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2u(t) + y(t) - \frac{(1-m)y(t)}{[(x(t)+m)^2+y(t)^2]^{1.5}} - \frac{my(t)}{[(x(t)-1+m)^2+y(t)^2]^{1.5}} \quad (3.5\delta)$$

με τις ακόλουθες τιμές παραμέτρων και αρχικών συνθηκών:

$$m = 0.012277471 \quad (3.6\alpha)$$

$$x_0(1) = x(0) = 0.994 \quad (3.6\beta)$$

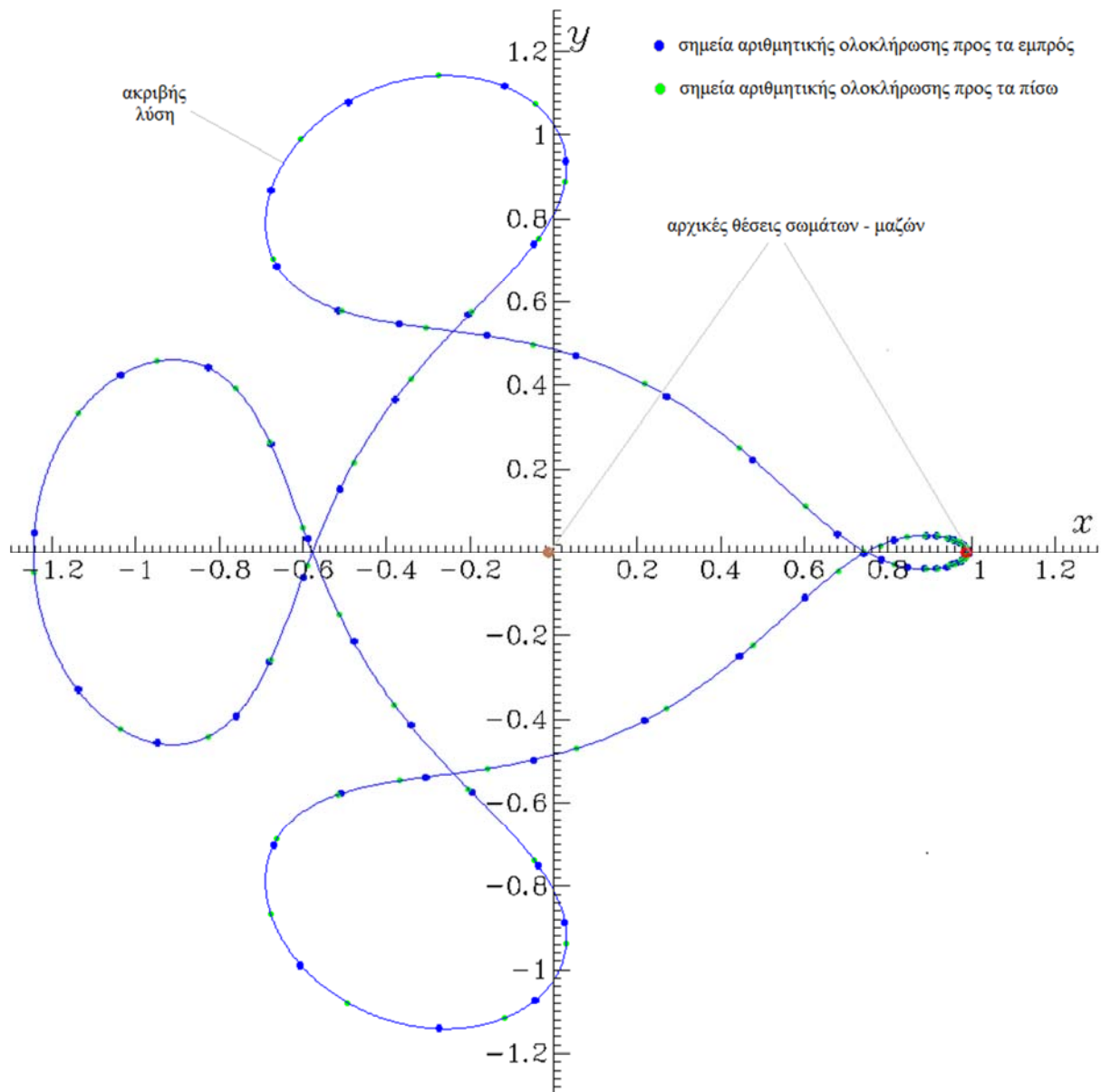
$$x_0(2) = y(0) = x_0(3) = u(0) = 0 \quad (3.6\gamma)$$

$$x_0(4) = v(0) = -2.00158510637908 \quad (3.6\delta)$$

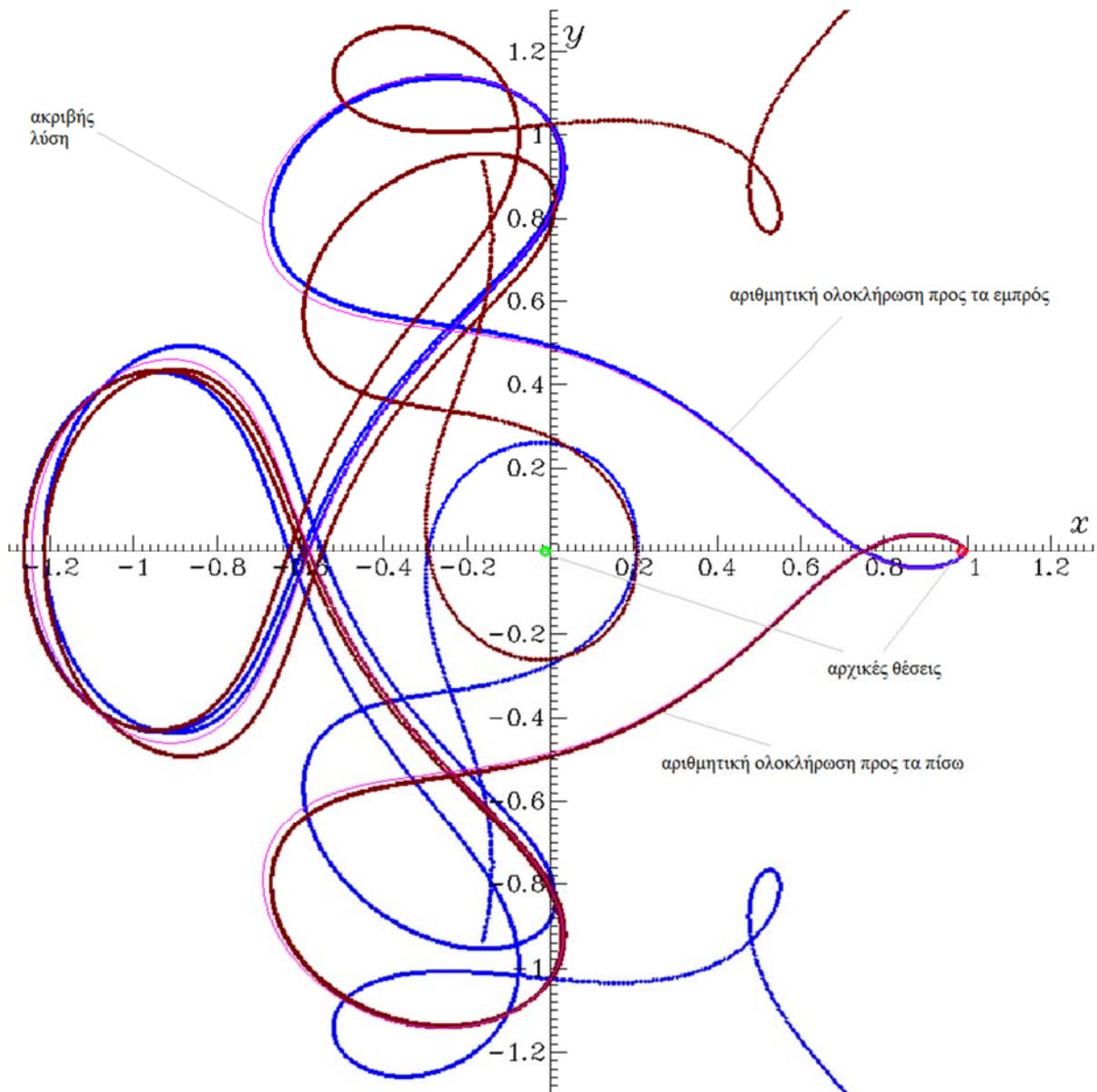
Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στο σύστημα γης – σελήνης, όπου  $1-m$  και  $m$  είναι οι μάζες των δύο ουρανίων σωμάτων, που βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία για τις θέσεις  $(-m, 0)$  και  $(1-m, 0)$ . Κατόπιν πραγματοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση των (3.5) με βάση τις (3.6), τόσο για  $t \rightarrow +\infty$  όσο και για  $t \rightarrow -\infty$ , με χρήση δύο αριθμητικών μεθόδων.

Η 1<sup>η</sup> μέθοδος είναι αυτή των Dormand-Prince 8<sup>[2]</sup>, με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.001$ . Μέσω αυτής αναπαριστάται γραφικά η εντός του επιπέδου  $[x, y]$  θέση των δύο μαζών. Η ελαφρά μπλε κλειστή καμπύλη στο Σχήμα 3.3 είναι η κλασσική των δύο σωμάτων, ενώ οι **μπλε** και **πράσινες** τελείες τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης προς τα μπρος και προς τα πίσω αντίστοιχα. Η χρονική αναστρεψιμότητα είναι προφανής. Αν αντί των σημείων καταγραφόταν η καμπύλη, θα υπήρχε πλήρης ταύτιση για  $t \rightarrow +\infty$  και  $t \rightarrow -\infty$ . Οι αρχικές θέσεις των δύο μαζών είναι επίσης σημειωμένες στο Σχήμα 3.3.

Η 2<sup>η</sup> μέθοδος είναι αυτή του Milne<sup>[2]</sup> με βήμα ολοκλήρωσης  $h=0.002$ . Τα σχετικά, παρόμοια με το Σχήμα 3.3 αποτελέσματα απεικονίζονται στο Σχήμα 3.4. Εδώ η μέθοδος δεν οδηγεί στην ακριβή λύση, αλλά όμως καταδεικνύει την χωρική και χρονική συμμετρία.



Σχήμα 3.3 Γραφική απεικόνιση αριθμητικής επίλυσης του ΔΠ των εξισώσεων (3.5) και (3.6) με τη μέθοδο Dormand-Prince 8, τόσο για  $t \rightarrow +\infty$  όσο και για  $t \rightarrow -\infty$

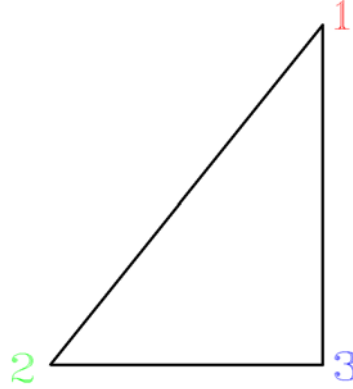


Σχήμα 3.4 Γραφική απεικόνιση αριθμητικής επίλυσης του ΔΠ των εξισώσεων (3.5) και (3.6) με τη μέθοδο Milne, τόσο για  $t \rightarrow +\infty$  όσο και για  $t \rightarrow -\infty$

Σαν σημαντική παρατήρηση μπορούμε να τονίσουμε ότι η επιρροή της μεθόδου ολοκλήρωσης και του σχετικού βήματος επηρεάζει την προσέγγιση της πραγματικής λύσης, πλην όμως διατηρεί την δυνατότητα εύρεσης χωρικής και χρονικής συμμετρίας του συστήματος.

### 3.4 Ένα Ιδιαίτερο Πρόβλημα Τριών Σωμάτων

Θεωρούμε το ιδιαίτερο πρόβλημα των τριών σωμάτων του Burrau<sup>[3,4]</sup>. Σε αυτό, τρεις μάζες  $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$  βρίσκονται αρχικά σε ηρεμία στις κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές μήκους 3, 4 και 5 (υποτείνουσα,  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ), σύμφωνα με το Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5. Ορθογώνιο τρίγωνο του προβλήματος του Burrau

Αν συντομογραφικά γράψουμε  $\text{hypot}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$  (υποτείνουσα) και οι μάζες αφεθούν να κινηθούν στο επίπεδο σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης (mutual gravitational attraction), το διανυσματικό πεδίο που διέπει την κίνηση των τριών μαζών είναι διάστασης 12 και έχει ως εξής:

$$dx_1/dt = u_1 \quad (3.7\alpha)$$

$$du_1/dt = -m_2 * (x_1 - x_2)/\text{hypot}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)^3 - m_3 * (x_1 - x_3)/\text{hypot}(x_1 - x_3, y_1 - y_3)^3 \quad (3.7\beta)$$

$$dy_1/dt = v_1 \quad (3.7\gamma)$$

$$dv_1/dt = -m_2 * (y_1 - y_2)/\text{hypot}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)^3 - m_3 * (y_1 - y_3)/\text{hypot}(x_1 - x_3, y_1 - y_3)^3 \quad (3.7\delta)$$

$$dx_2/dt = u_2 \quad (3.7\epsilon)$$

$$du_2/dt = -m_1 * (x_2 - x_1)/\text{hypot}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^3 - m_3 * (x_2 - x_3)/\text{hypot}(x_2 - x_3, y_2 - y_3)^3 \quad (3.7\sigma\tau)$$

$$dy_2/dt = v_2 \quad (3.7\zeta)$$

$$dv_2/dt = -m_1 * (y_2 - y_1)/\text{hypot}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)^3 - m_3 * (y_2 - y_3)/\text{hypot}(x_2 - x_3, y_2 - y_3)^3 \quad (3.7\eta)$$

$$dx_3/dt = u_3 \quad (3.7\theta)$$

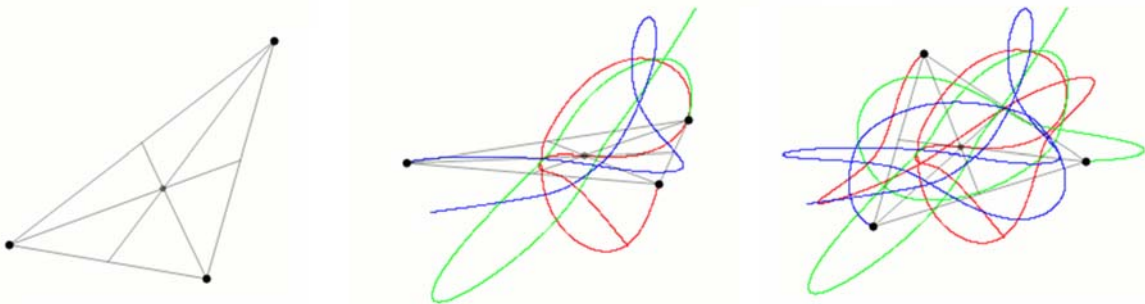
$$du_3/dt = -m_1 * (x_3 - x_1)/hypot(x_3 - x_1, y_3 - y_1)^3 - m_2 * (x_3 - x_2)/hypot(x_3 - x_2, y_3 - y_2)^3 \quad (3.7i)$$

$$dy_3/dt = v_3 \quad (3.7ia)$$

$$dv_3/dt = -m_1 * (y_3 - y_1)/hypot(x_3 - x_1, y_3 - y_1)^3 - m_2 * (y_3 - y_2)/hypot(x_3 - x_2, y_3 - y_2)^3 \quad (3.7i\beta)$$

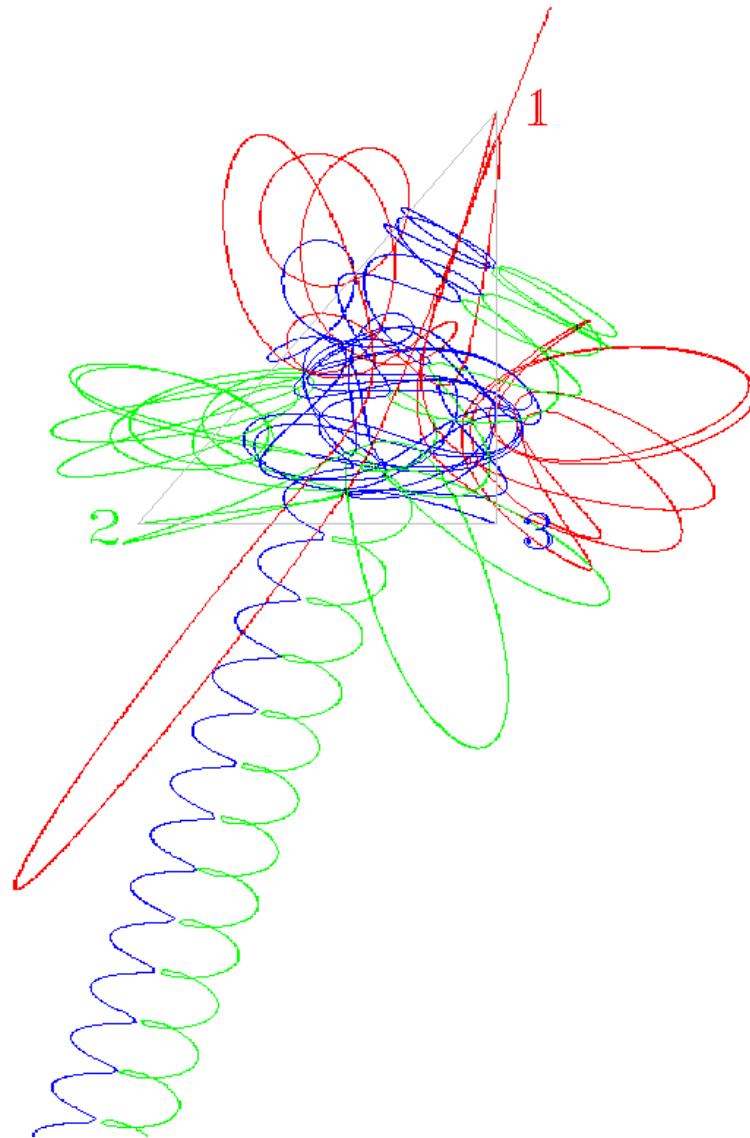
Λόγω της μεγάλης διάστασης του διανυσματικού πεδίου, η θεωρητική προσέγγιση της εξερεύνησης των συμμετριών του είναι ανέφικτη. Επίσης, οποιαδήποτε γραφική αναπαράσταση στο χώρο φάσεων επαφίεται σε απεικονίσεις Poincaré (μιας ή δύο πλευρών, one or two-sided), σύμφωνα με την κλασσική προσέγγιση των ΔΠ.

Από τις αρχές του 1900 (αλλά και νωρίτερα) γνωρίζουμε ότι όταν τρεις ίσες μάζες, αρχικά σε ηρεμία, βρίσκονται στις κορυφές ενός σκαληνού τριγώνου, και ξεκινούν κίνηση λόγω αμοιβαίας έλξης, τότε ναι μεν διαγράφουν τροχιές στο χώρο, αλλά το κέντρο μάζας, σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής παραμένει στην ίδια θέση (στο κέντρο βάρους του τριγώνου πριν την έναρξη της κίνησης). Η ιδιότητα αυτή φαίνεται στα στιγμιότυπα κίνησης του Σχήματος 3.6.



Σχήμα 3.6 Στιγμιότυπα του κλασσικού προβλήματος κίνησης τριών σωμάτων με ίδιες μάζες

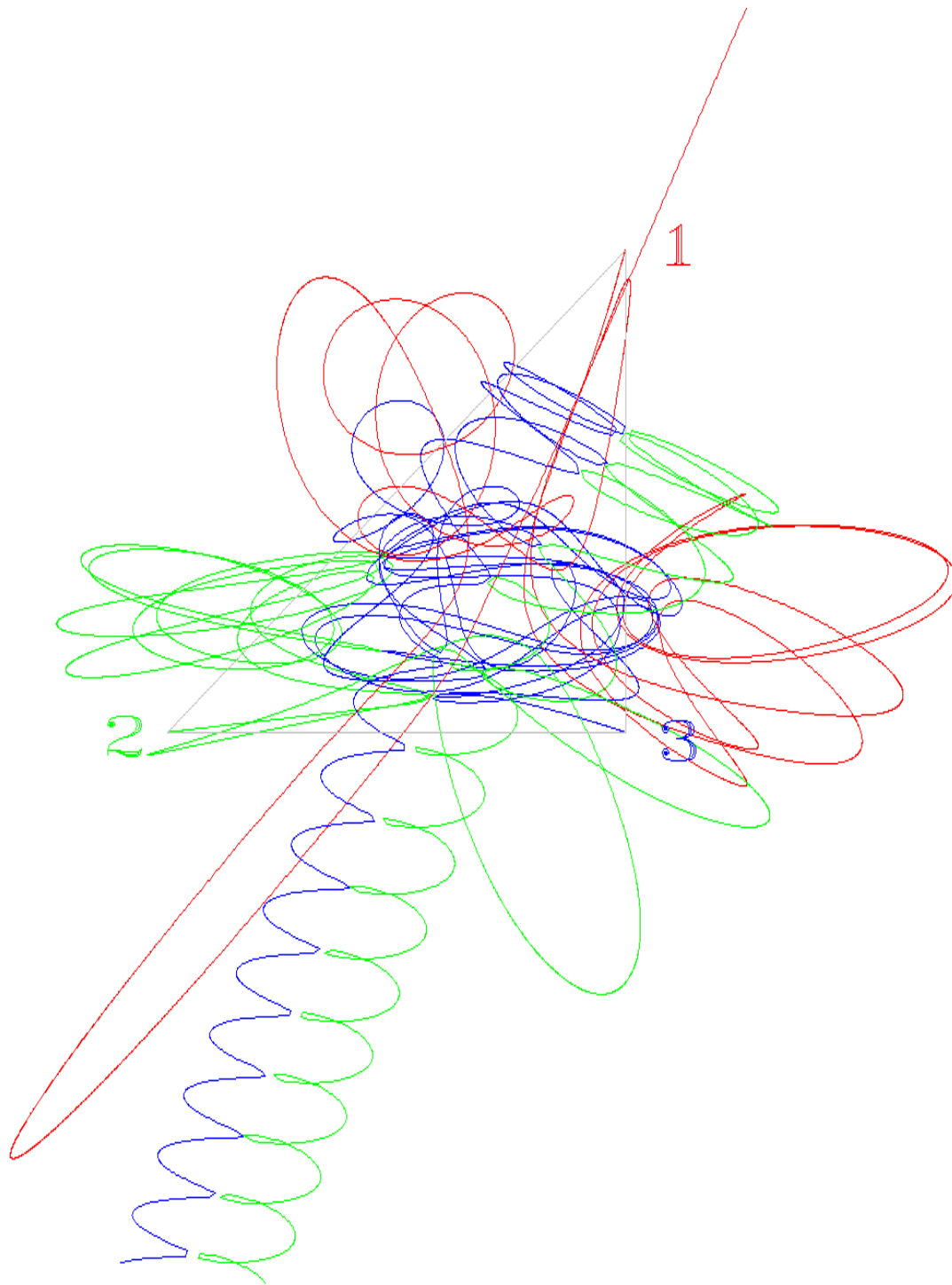
Στο ιδιαίτερο πρόβλημα της παρούσας ενότητας, και παρόλο που οι μάζες των σωμάτων που έλκονται αμοιβαία δεν είναι ίσες, η θέση του κέντρου μάζας παραμένει σταθερή. Η «προς τα εμπρός» απεικόνιση καταδεικνύει ότι, μετά από κάποιες σύνθετες κινήσεις, η μάζα  $m_1$  εκφεύγει του συστήματος, και οι άλλες δύο μάζες κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αποτέλεσμα αυτού είναι πλέον ότι το σύστημα γίνεται δυαδικό (binary). Η εικόνα του Σχήματος 3.7 αποτυπώνει το παραπάνω, με τα χρώματα των «τροχιών» να αντιστοιχούν στις σχετικές μάζες.



Σχήμα 3.7 Απεικόνιση *Poincaré* του προβλήματος *Burrau* σε αριθμητική προς τα εμπρός «ολοκλήρωση»

Η αντίστροφη ανάλυση απεικόνισης, ακριβώς λόγω της διατήρησης της θέσης του κέντρου μάζας οδηγεί σε ταυτόσημη γραφική αναπαράσταση, γεγονός που καταδεικνύει τη χρονική συμμετρία – αναστρεψιμότητα χρόνου του προβλήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8.





Σχήμα 3.8 Απεικόνιση Poincaré του προβλήματος Burrau σε αριθμητική προς τα πίσω «ολοκλήρωση»

### Βιβλιογραφία

- [1] R. F. Abreu, R. O. Vallejos, (2006). Entangling power of the baker's map: Role of symmetries. *Physical Review A*, **73**, 052327. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.73.052327>



- [2] K. E. Atkinson, W. Ham, and D. E. Stewart, (2009). Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Wiley Interscience.
- [3] C. Burrau (1894). Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps. (Deuxième mémoire.)  
<https://doi.org/10.1002/asna.18941361102>
- [4] C. Burrau (1913). Numerische Berechnung eines Spezialfalles des Dreikörperproblems. *Astronomische Nachrichten*, **195** (6), 113–118.  
<https://doi.org/10.1002/asna.18941361102>

**ΕΥΡΗΜΑΤΑ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Από την πραγματοποιηθείσα στην παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία μελέτη των επιλεγμένων δυναμικών συστημάτων, με πιθανή χρονική αντιστρεψιμότητα – συμμετρία χρόνου, μπορούν να εξαχθούν τα ακόλουθα ευρήματα - συμπεράσματα:

- (1) Οι θεωρητικές αναλύσεις μέσω κλασσικών θεωρημάτων της δυναμικής αποτελούν ισχυρό εργαλείο, αλλά περιορίζονται σε συστήματα μικρών διαστάσεων, εκτός ειδικών περιπτώσεων.
- (2) Η χρήση εξελιγμένων τεχνικών μέσω μαθηματικού λογισμικού, αριθμητικών αναλύσεων και γραφικών απεικονίσεων φαίνεται να είναι μια ισχυρή εναλλακτική διαδικασία διαπίστωσης της συμμετρίας αυτής, βασιζόμενη πάντα στις τεκμηριωμένες θεωρίες.
- (3) Ακόμα και αν κάποιες μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης δεν συγκλίνουν (δλδ. δεν οδηγούν σε ακριβή λύση), η φύση της αντιστρεψιμότητας χρόνου αναδεικνύεται.
- (4) Για προβλήματα μεγάλων διαστάσεων, φαίνεται ότι οι αριθμητικές μέθοδοι είναι το μοναδικό εργαλείο, αρκεί να συνοδεύονται από κατάλληλες υπορουτίνες «προς τα εμπρός» και «προς τα πίσω» αναλύσεων με τα κατάλληλα εργαλεία προγραμματισμού γραφικών απεικονίσεων.

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΟΡΙΣΜΟΙ, ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ**

### **A.1 Ορισμοί και Χαρακτηριστικές Εξισώσεις**

#### **A.1.1 Η έννοια των Πολλαπλοτήτων (Manifolds)**

Στα Μαθηματικά, μια πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο οποίος τοπικά ομοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο. Η εφαρμογή τους αφορά κεντρικές, αναλλοίωτες και άλλες πολλαπλότητες, των οποίων οι ιδιότητες μπορούν να βρεθούν σε μεγάλο αριθμό βιβλίων και δημοσιεύσεων, που δεν παρατίθενται εδώ για λόγους οικονομίας της ύλης. Χαρακτηριστικό και άκρως κατατοπιστικό είναι το βιβλίο του **Stephen Wiggins** **“Introduction to Nonlinear Applied Dynamical Systems and Chaos, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer, 2000”**.

#### **A.1.2 Διαφορομορφισμοί (Diffeomorphisms)**

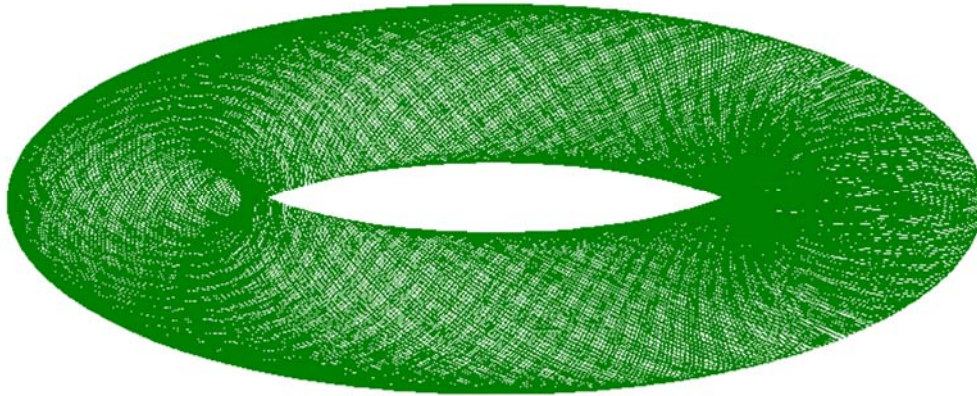
Δοθισών δύο Πολλαπλοτήτων  $M$  και  $N$ , ένας διαφορομορφισμός είναι μια απεικόνιση διατήρησης της δομής παρόμοιων μορφών, που μπορούν και αντιστροφικά να διατηρηθούν. Αναλυτικότερα, αν επίσης θεωρηθεί μια διαφορίσιμη απεικόνιση (differential map)  $f: M \rightarrow N$ , τότε αυτή καλείται διαφορομορφισμός όταν είναι αμφιμονοσήμαντη, και όταν και η αντίστροφη της είναι επίσης διαφορίσιμη.

#### **A.1.3 Τόρος**

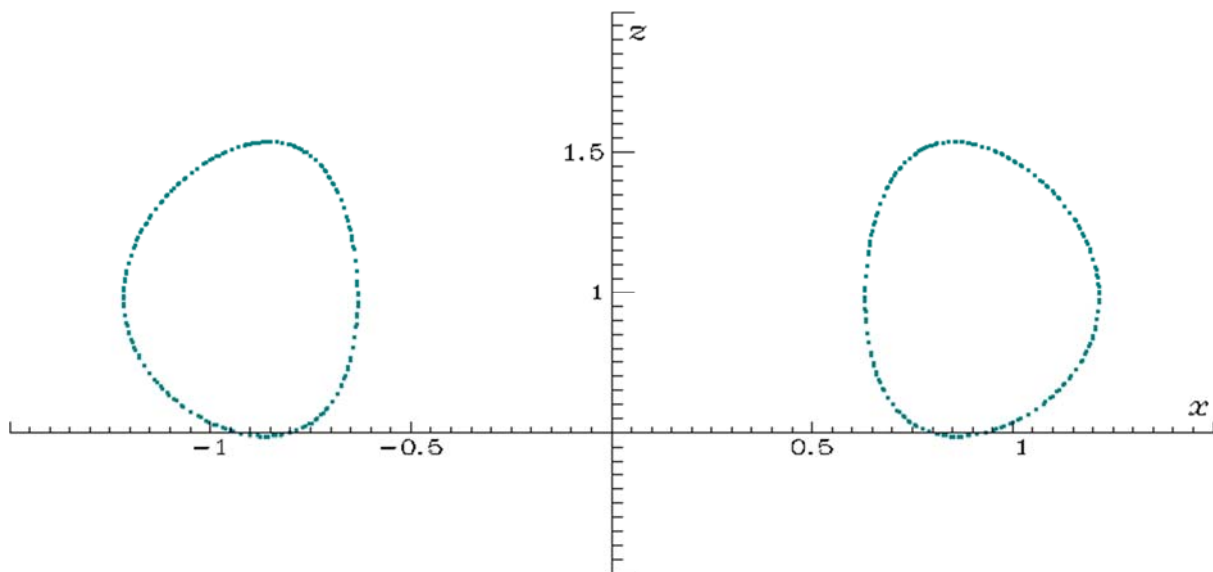
Στην Ευκλείδεια γεωμετρία ο τόρος (σαμπρέλα) είναι ένα μια εκ περιστροφής επιφάνεια, η οποία παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου στον τρισδιάστατο χώρο περί άξονα συνεπίπεδο με τον κύκλο. Τοπολογικά ο τόρος  $n$  διαστάσεων είναι ο χώρος του γινομένου  $n$  κύκλων, δηλαδή  $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$ . Άρα, ο 1-τόρος είναι ο κύκλος, ο 2-τόρος η επιφάνεια που αναφέρθηκε πριν, ενώ οι τόροι ανώτερης τάξης δεν μπορούν να απεικονιστούν γραφικά, παρά μόνο με μείωση κάποιων διαστάσεων τους μέσω απεικονίσεων Poincaré. Ροές δυναμικών συστημάτων μέσα σε τόρους διαφόρων τάξεων έχουν διαπιστωθεί κατά κόρον στη Μη Γραμμική Δυναμική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το διανυσματικό πεδίο τριών διαστάσεων:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = x[a - b + z + d(1 - \sqrt{z})] + cy \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = y[a - b + z + d(1 - \sqrt{z})] + cx \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z} = az - [\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}] \end{aligned} \right\}$$

Για τιμές των παραμέτρων  $a = 2.01$ ,  $b = 3.00$ ,  $c = 0.25$ ,  $d = 0.2$  και αρχική τιμή  $x(0) = 0.1$  (για εφικτή την αριθμητική ολοκλήρωση), η προβολή της ροής και οι απεικονίσεις Poincaré δίνονται στα Σχήματα A.1 και A.2.



Σχήμα A.1. Προβολή της ροής σε τόρο



Σχήμα A.2. Απεικόνιση Poincare x-z

#### A.1.4 Εξισώσεις Hamel

Έστω ότι τα  $u_1(q), \dots, u_n(q)$ ,  $n = \dim Q$  είναι ανεξάρτητα (τοπικά) διανυσματικά πεδία στο  $Q$ , τα οποία γενικά δεν μετατίθενται. Εισάγουμε τις καλούμενες **συναρτήσεις δομής** (structure functions)  $c_{ij}^k(q)$ , μέσω της σχέσης

$$[u_i(q), u_j(q)](q) = c_{ij}^k(q)u_k(q) \quad (\text{A.1.1})$$

Στη συνέχεια κάνουμε χρήση αυτών των πεδίων για να βρούμε τις συνιστώσες ταχύτητας

$$\dot{q} = \dot{q}^i \partial_{q^i} = \xi^i u_i(q) \quad (\text{A.1.2})$$

όπου  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ , και εκφράζουμε την *Lagrangian* συναρτήσεως των  $(q, \xi)$ :

$$l(q, \xi) := L(q, \xi^i u_i(q)) \quad (\text{A.1.3})$$

Η δυναμική πλέον των πεδίων διέπεται από τις εξισώσεις Hamel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \xi^j} = c_{ij}^a \frac{\partial l}{\partial \xi^a} \xi^i + u_j[l]$$

οι οποίες αποτελούν γενικεύσεις των εξισώσεων *Euler-Lagrange* αλλά και *Euler-Poincaré*, και τυγχάνουν ευρείας εφαρμογής στην μη ολονομική Μηχανική (διατήρηση ορμής, ολοκληρωσιμότητα), στον έλεγχο των μηχανικών συστημάτων και στη διακριτή Μηχανική.

## **A.2 Θεωρήματα**

### **A.2.1 Το θεώρημα της Emmy Noether και οι συμμετρίες**

Το συγκεκριμένο θεώρημα διατυπώθηκε από την Γερμανίδα, Εβραϊκής καταγωγής Μαθηματικό το έτος 1915 και δημοσιεύθηκε το 1918. Εκφράζει την σχέση που υφίσταται μεταξύ των νόμων διατήρησης και του αναλλοίωτου των φυσικών νόμων κάτω από ορισμένους μετασχηματισμούς, που συνήθως αναφέρονται ως συμμετρίες.

Μια ιδιαίτερα κατατοπιστική διατύπωση του εν λόγω θεωρήματος είναι:

*Αν ένα ιδιαίτερο φυσικό φαινόμενο διέπεται από συνεχείς συμμετρίες (αναλλοίωτη η αντίστοιχη Lagrange), υπάρχει μια φυσική ποσότητα που διατηρείται και δίνεται από τον γεννήτορα της αντίστοιχης ομάδας.*

Για παράδειγμα,

(α) η συμμετρία ως προς τη Χρονική Μετατόπιση (Χρονική Ομογένεια) συνεπάγεται διατήρηση της ενέργειας,

(β) η συμμετρία ως προς την Χωρική Μετατόπιση (Ομογένεια του Χώρου) συνεπάγεται την διατήρηση της ορμής, και

(γ) η συμμετρία ως προς τη στροφή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση στο χώρο (Χωρική Ισοτροπία) συνεπάγεται την διατήρηση της στροφορμής.

Συνεπώς, οι νόμοι διατήρησης αποτελούν απόρροια αλλά και θεμέλιο κατανόησης του Χωροχρόνου.

Το θεώρημα αυτό απετέλεσε ένα θεμελιώδες εργαλείο της μοντέρνας Θεωρητικής Φυσικής του Λογισμού των Μεταβολών και της Θεωρίας των Διαταραχών.

Ένας *νόμος διατήρησης* (conservation law) δηλώνει ότι κάποια ποσότητα  $X$  στη μαθηματική διατύπωση της εξέλιξης ενός συστήματος παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια

της κίνησης του, γεγονός που την καθιστά *αμετάβλητη/αναλλοίωτη (invariant)*. Άρα, ο ρυθμός αλλαγής της  $X$  (δλδ. η παράγωγος της ως προς το χρόνο) ισούται με μηδέν:

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

Μια δράση, έτσι όπως ορίζεται αυστηρά μαθηματικά, είναι το χρονικό ολοκλήρωμα  $I$  μιας συνάρτησης, το οποίο καλείται *Lagrangian*  $L$ , και δεν απαιτείται να εκφραστεί αποκλειστικά μέσω Καρτεσιανών συντεταγμένων. Το εν λόγω ολοκλήρωμα, εκφρασμένο μέσω ενός συνόλου γενικευμένων συντεταγμένων  $\mathbf{q}$  και των παραγώγων τους ως προς το χρόνο είναι:

$$I = \int L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (\text{A.2.2})$$

Παράλληλα, η αρχή του *Hamilton* ορίζει ότι ο φυσικός δρόμος  $\mathbf{q}(t)$  – αυτός που πραγματικά θα ακολουθηθεί από το σύστημα – δεν θα οδηγήσει για απειροελάχιστες μεταβολές του (τουλάχιστον 1<sup>ης</sup> τάξης) σε αλλαγή του  $I$ . Η αρχή αυτή οδηγεί στις γνωστές εξισώσεις *Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (\text{A.2.3})$$

Άρα, αν κάποια από τις γενικευμένες συντεταγμένες, έστω η  $p_k$ , δεν εμφανίζεται στην *Lagrangian*, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (A.2.3) ισούται με μηδέν, οπότε το αριστερό μέλος καταδεικνύει ότι:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} \quad (\text{A.2.4})$$

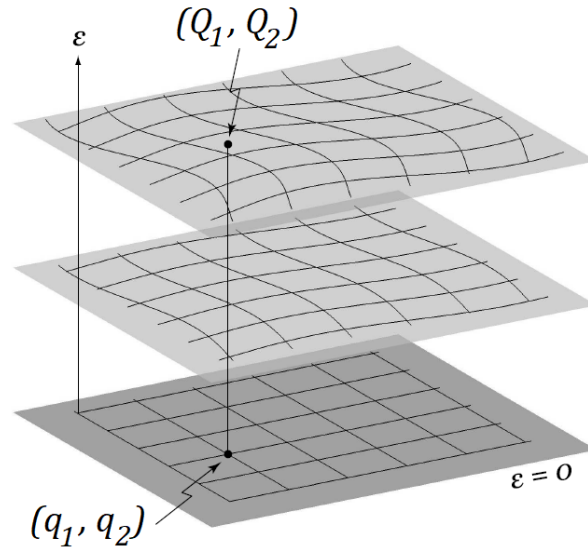
Η απουσία της συντεταγμένης  $p_k$  από την *Lagrangian* σημαίνει ότι η εν λόγω είναι ανεπηρέαστη από αλλαγές ή μετασχηματισμούς της  $p_k$ . Η *Lagrangian* είναι *αναλλοίωτη*, και παρουσιάζει ένα είδος *συμμετρίας*. Αυτή είναι η βασική ιδέα από την οποία γεννήθηκε το θεώρημα της *Noether*.

Πριν την διατύπωση του θεωρήματος αυτού, θα εξεταστεί η πλέον γενική μορφή ενός συνεχούς μετασχηματισμού συντεταγμένων. Προς τούτο αναφερόμαστε σε κάποιο φυσικό σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τις  $n$  γενικευμένες συντεταγμένες  $q_i, i \div n$  αλλά και σε  $n$  νέες συναρτήσεις  $Q_i, i \div n$ , που θα διαδραματίσουν τον ρόλο των νέων συντεταγμένων, όπως επίσης και σε μια νέα συνεχή μεταβλητή  $\varepsilon$ , τέτοιες ώστε:

$$Q_{a(q_1, q_2, \dots, q_n, \varepsilon)} = q_a, \text{ όταν } \varepsilon = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

Η παράμετρος – μεταβλητή  $\varepsilon$  αλλάζει τις συντεταγμένες από  $q$  σε  $Q$  με συνεχή τρόπο, ενώ για  $\varepsilon = 0$  αυτές ταυτίζονται, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα Α.3.





Σχήμα Α.3. Συνεχής μετασχηματισμός συντεταγμένων

Ένας τέτοιου είδους μετασχηματισμός καλείται *συμμετρία της Lagrangian*, αν η τελευταία στις νέες συντεταγμένες δεν αλλάζει αριθμητικά (σε όρους 1<sup>ης</sup> τάξης) σε σχέση με την παράμετρο  $\varepsilon$ , δηλαδή αν ισχύει ότι:

$$L\left(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \varepsilon), \frac{d\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \varepsilon)}{dt}, t\right) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{A.2.6})$$

όπου  $\mathbf{Q} \rightarrow Q_i, \mathbf{q} \rightarrow q_i, i = 1 \div n$ .

Αφού η παράμετρος  $\varepsilon$  είναι συνεχής, μπορούμε να θεωρήσουμε την οικογένεια των επόμενων απειροστών μετασχηματισμών (family of infinitesimal transformations):

$$Q_i(\mathbf{q}, \varepsilon \cong 0) \cong Q_i(\mathbf{q}, 0) + \varepsilon \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \equiv q_i + \varepsilon K_i(\mathbf{q}) \quad (\text{A.2.7})$$

οι οποίοι προσεγγίζουν τον γενικό μετασχηματισμό  $Q_i(\mathbf{q}, \varepsilon)$  για  $\varepsilon \ll$ . Έτσι, ο μετασχηματισμός προσδιορίζεται με πληρότητα μέσω των συναρτήσεων  $K_i(\mathbf{q}), i = 1 \div n$ , οι οποίες καλούνται *γεννήτριες* αυτού.

Δυνάμεθα στο σημείο αυτό, μετά τις παραπάνω διευκρινήσεις, να διατυπώσουμε την περιορισμένη μορφή του τρέχοντος θεωρήματος. Η εκτεταμένη διατύπωση εκφεύγει των σκοπών της παρούσας Μεταπτυχιακής εργασίας.

Αν η Lagrangian ενός συστήματος είναι συμμετρική ως προς κάποιους συνεχείς απειροστούς μετασχηματισμούς με γεννήτριες  $K_i$ , τότε η ποσότητα

$$\sum_{i=1}^n K_i p_i$$

διατηρείται, όπου  $p_i$  είναι η γενικευμένη ορμή  $(\partial L / \partial \dot{q}_i)$ , συζυγής της  $q_i$ .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το περιεχόμενο της εργασίας παρουσιάζει και **η απόδειξη του θεωρήματος**, η οποία έπεται.

Γράφοντας την *Lagrangian* με βάση τις νέες συντεταγμένες και αναπτύσσοντας ως προς  $\varepsilon$ , επειδή  $\dot{Q}_i = \dot{q} + \varepsilon \dot{K}$  θα ισχύει ότι

$$L(Q, \dot{Q}, t) = L(q + \varepsilon K, \dot{q} + \varepsilon \dot{K}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{K}_i \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{A.2.8})$$

Όμως, καθώς η  $L$  είναι συμμετρική ως προς αυτούς τους μετασχηματισμούς, η ποσότητα 1<sup>ης</sup> τάξης στο παραπάνω ανάπτυγμα πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Το αναλλοίωτο της  $L$  συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{K}_i = 0 \quad (\text{A.2.9})$$

Δοθέντος του γεγονότος ότι η  $q_i(t)$  αποτελεί την φυσική τροχιά του συστήματος που ικανοποιεί τις εξισώσεις *Euler-Lagrange* θα ισχύει επιπρόσθετα ότι

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (\text{A.2.10})$$

Με βάση τα ανωτέρω, η σχέση (A.2.9) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{K}_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} K_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i \right) = 0 \quad (\text{A.2.11})$$

Τελικά, δείχτηκε ότι η συμμετρία της  $L$  οδηγεί – κατά την φυσική κίνηση του συστήματος – στην διατήρηση ποσότητας  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i$ , δηλαδή στην διατήρηση της συνισταμένης των προβολών των γενικευμένων ορμών στη διεύθυνση της εκάστοτε γεννήτριας της συμμετρίας.

### **A.2.2 Θεώρημα KAM (Kolmogorov – Arnol'd - Moser)<sup>1, 2</sup>**

Εισαγωγικά, το κλασικό θεώρημα KAM ασχολείται με την ευστάθεια της κίνησης σε Χαμιλτονιανά συστήματα, τα οποία αποτελούν μικρές διαταραχές ολοκληρώσιμων Χαμιλτονιανών συστημάτων. Τα τελευταία χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη συντεταγμένων γωνίας – δράσης (action angle coordinates) τέτοιων ώστε η Χαμιλτονιανή να εξαρτάται αποκλειστικά από αυτές.

Λόγω των ανωτέρω, θεωρούμε Χαμιλτονιανές της μορφής

$$H(p, q) = h(p) + f_\varepsilon(p, q), \quad f_\varepsilon(p, q) = \varepsilon f^*(p, q, \varepsilon) \quad (\text{A.2.12})$$

για μικρά  $\varepsilon$ , όπου  $p = (p_1, \dots, p_n)$  είναι οι προαναφερθείσες συντεταγμένες γωνίας – δράσης, που μεταβάλλονται σε κάποιο πεδίο ορισμού (domain)  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ενώ  $q = (q_1, \dots, q_n)$  είναι οι συζυγείς γωνιακές μεταβλητές, το πεδίο ορισμού των οποίων είναι ο συνήθης  $n$ -τόρος  $\mathbb{T}^n$ .

<sup>1</sup> Rafael de La Llave, *A Tutorial on KAM Theory*, DOI: [10.1090/pspum/069/1858536](https://doi.org/10.1090/pspum/069/1858536)

<sup>2</sup> [https://courses.seas.harvard.edu/climate/eli/Courses/APM203/2003fall/Poschel\\_ClassicalKAM.pdf](https://courses.seas.harvard.edu/climate/eli/Courses/APM203/2003fall/Poschel_ClassicalKAM.pdf)

Αυτός αποκτάται από τον χώρο  $\mathbb{R}^n$  αναγνωρίζοντας σημεία των οποίων οι συντεταγμένες (components) διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi$ . Συνεπώς, η  $f_\varepsilon$  διαθέτει περίοδο  $2\pi$  σε κάθε συντεταγμένη των  $q$ . Επιπρόσθετα, όλες οι εξεταζόμενες Χαμιλτονιανές θεωρούνται πραγματικές και αναλυτικές παντού.

Ως συνήθως, οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\dot{p} = -H_q(p, q), \quad \dot{q} = H_p(p, q) \quad (\text{A.2.13})$$

σε τυπικό διανυσματικό συμβολισμό, με την άνω τελεία να υποδηλώνει παράγωγο ως προς τον χρόνο  $t$  και τον δείκτη μερική παράγωγο. Ο υποκείμενος χώρος φάσης είναι  $D \times \mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$  με την παρακάτω τυπική συμπλεκτική<sup>3</sup> δομή:

$$\omega = \sum_j dp_j \wedge dq_j \quad (\text{A.2.14})$$

Το Χαμιλτονιανό διανυσματικό πεδίο  $X_H$ , το οποίο σχετίζεται με τις εξισώσεις κίνησης θα ικανοποιεί συνεπώς τη σχέση  $\iota_{X_H} \omega = -dH$ . Υποθέτουμε κατόπιν ότι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας  $n$  είναι τουλάχιστον 2, καθόσον τα μονοβάθμια συστήματα είναι πάντοτε ολοκληρώσιμα.

Για  $\varepsilon = 0$  το σύστημα διέπεται από την αδιατάρακτη ολοκληρώσιμη Χαμιλτονιανή  $h$ , οπότε οι εξισώσεις κίνησης περιορίζονται στις:

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \omega = h_p(p) \quad (\text{A.2.15})$$

Αυτές ολοκληρώνονται άμεσα, έχοντας γενική λύση

$$p(t) = p_0, \quad q(t) = q_0 + \omega(p_0)t \quad (\text{A.2.16})$$

Άρα, κάθε καμπύλη λύσης είναι μια ευθεία γραμμή, η οποία, λόγω της ταυτοποίησης των  $q$  – συντεταγμένων modulo  $2\pi$ , τυλίγεται γύρω από τον αμετάβλητο τόρο

$$\mathcal{T}_{p_0} = \{p_0\} \times \mathbb{T}^n \quad (\text{A.2.17})$$

με σταθερές συχνότητες, αλλιώς αριθμούς τυλίγματος (*winding numbers*),  $\omega(p_0) = (\omega_1(p_0), \dots, \omega_n(p_0))$ . Τέτοιοι τόροι με γραμμική ροή καλούνται επίσης και *τόροι Kronecker* και μάλιστα είναι και *Lagrangian*. Τούτο σημαίνει ότι ο περιορισμός της συμπλεκτικής μορφής  $\omega$  του εφαπτομενικού τους χώρου εξαφανίζεται, και η διάσταση τους είναι μέγιστη σε σχέση με αυτή την ιδιότητα. Με άλλα λόγια, όλος ο χώρος φάσης είναι *φυλλωμένος* (foliated) μέσα σε μια  $n$ -παραμετρική οικογένεια αμετάβλητων *Lagrangian* τόρων  $\mathcal{T}_{p_0}$ , στην οποία η ροή είναι γραμμική με σταθερές συχνότητες  $\omega(p_0)$ . Αυτή είναι η γεωμετρική εικόνα ενός ολοκληρώσιμου Χαμιλτονιανού συστήματος.

<sup>3</sup> [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Symplectic\\_structure](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Symplectic_structure)

Θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψη ότι, λόγω της εισαγωγής των συντεταγμένων γωνιών δράσης, οι λύσεις αυτές σχετίζονται με τις καλούμενες *λύσεις πραγματικότητας* (real world solutions), μέσω κάποιου μετασχηματισμού συντεταγμένων, που είναι περιοδικός στα  $q_1, \dots, q_n$ . Αναπτύσσοντας έναν τέτοιο μετασχηματισμό σε σειρές Fourier και εισάγοντας τις γραμμικές λύσεις που βρέθηκαν πριν, οι πραγματικές λύσεις γράφονται με την ακόλουθη μορφή:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k(p_0) e^{i(k, q_0) + t(k, \omega(p_0))}, a_k \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{A.2.18})$$

Συνεπώς, *κάθε λύση* είναι *οιονεί-περιοδική* (quasi-periodic) ως προς το χρόνο  $t$ . Εδώ η γραφή  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  υποδηλώνει τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό (scalar product). Το φάσμα συχνοτήτων γενικά δεν αποτελείται από ακέραια πολλαπλάσια μιας μόνης συχνότητας – όπως στην περίπτωση *περιοδικών λύσεων* – αλλά μάλλον από ακέραιους συνδυασμούς ενός πεπερασμένου αριθμού διαφορετικών συχνοτήτων. Τελικά, οι *λύσεις πραγματικότητας*, δεν είναι τίποτα άλλο παρά υπερθέσεις (superpositions)  $n$  ταλαντώσεων, κάθε μια από τις οποίες έχει την δικιά της συχνότητα. Ακόμα, οι εν λόγω οιονεί περιοδικές τροχιές εμφανίζονται σε οικογένειες, εξαρτώμενες από την παράμετρο  $q_0$ , γειμίζοντας έτσι έναν αμετάβλητο ενσωματωμένο  $n$ -τόρο. Επιστρέφοντας στις συντεταγμένες γωνίας – δράσης, παρατηρούμε ότι η τοπολογική φύση της ροής σε κάθε τόρο Kronecker εξαρτάται κρίσιμα από τις αριθμητικές ιδιότητες των συχνοτήτων της  $\omega$ . Στην παρούσα ανάλυση, υφίστανται δύο βασικές περιπτώσεις.

(1<sup>η</sup>) Οι συχνότητες  $\omega$  είναι μη συντονισμένες (non – resonant), με άλλα λόγια *λογικά ανεξάρτητες* (rationally independent), γεγονός που γράφεται ως:

$$(k, \omega) \neq 0 \text{ για όλα τα } k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^n \quad (\text{A.2.19})$$

Έτσι, στον τόρο αυτό, *κάθε τροχιά είναι πυκνή* (δηλαδή σε άπειρο χρόνο διέρχεται από όλα τα σημεία), η ροή είναι εργοδική, και ο τόρος είναι ελάχιστος.

(2<sup>η</sup>) Οι συχνότητες  $\omega$  είναι συντονισμένες (λογικά εξαρτημένες), οπότε υφίστανται ακέραιες σχέσεις της μορφής

$$(k, \omega) = 0 \text{ για κάποια } k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^n \quad (\text{A.2.20})$$

Έχει αποδειχθεί ότι και η διαταραγμένη Χαμιλτονιανή, διατηρεί την δομή των αμετάβλητων τόνων για μικρό  $\varepsilon \neq 0$ .

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, **το κλασσικό θεώρημα KAM** μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως:

Έστω ότι η ολοκληρώσιμη Χαμιλτονιανή  $h$  είναι *μη εκφυλισμένη* (non-degenerate), η απεικόνιση συχνοτήτων  $h_p$  είναι ένας διαφορομορφισμός  $D \rightarrow \Omega$ , και  $H = h + f_\varepsilon$  είναι πραγματική αναλυτική στο  $\bar{D} \times \mathbb{T}^n$ . Τότε, υπάρχει μια σταθερά  $\delta > 0$  τέτοια ώστε για

$$|\varepsilon| < \delta \alpha^2 \quad (\text{A.2.21})$$

όλοι οι τόροι *Kronecker*  $(\mathbb{T}^n, \omega)$  του μη διαταραγμένου συστήματος με  $\omega \in \Omega_\alpha$  παραμένουν ως *Lagrangian* τόροι, όντας μόνο ελαφρά παραμορφωμένοι. Επίσης, εξαρτώνται με συνεχή τρόπο *Lipschitz* από το  $\omega$  και γεμίζουν το χώρο  $D \times \mathbb{T}^n$  μέχρι ένα σύνολο μέτρου  $O(\alpha)$ .